ÁLGEBRA SUPERIOR

A. ADRIAN ALBERT

UTEHA

GRUPO NORIEGA EDITORES

TEMAS QUE ABORDA:

- Números naturales
- Números enteros
- Números racionales, reales y complejos
- Polinomios y funciones racionales
- Identidades y aplicaciones
- Ecuaciones
- Raíces reales de ecuaciones reales
- Vectores en el plano
- Matrices, determinantes y sistemas lineales
- Matrices y formas cuadráticas

ALGEBRA SUPERIOR

ALGEBRA SUPERIOR

A. ADRIAN ALBERT
Profesor de Matemáticas de la Universidad de Chicago

TRADUCCIÓN AL ESPAÑOL POR EL
PROF. ESTEBAN LLUIS FRANQUESA

REVISIÓN DE LA TRADUCCIÓN POR EL
PROF. EMILIO LLUIS RIERA
Doctor en Matemáticas

PRIMERA EDICIÓN EN ESPAÑOL
REIMPRESIÓN 1969

GRUPO **NORIEGA**
EDITORES

UTEHA

UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO AMERICANA
Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, La Habana, Lima, Montevideo, Quito, Río de Janeiro, San José de Costa Rica, San Salvador, Santiago.
MEXICO

Esta obra es la traducción al español, debidamente autorizada por el autor, de la publicada originalmente en inglés bajo el título de

COLLEGE ALGEBRA

Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.
Teléfono 521-50-98
Fax 512-29-03
Télex 1762410 ELIME

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera reimpresión: 1991
Impreso en México
(10418)

ISBN 968-18-4041-0

PROLOGO

El material matemático presentado en los textos corrientes para los centros escolares superiores y los primeros cursos universitarios comprende el álgebra como parte fundamental de las ciencias matemáticas. El álgebra contiene los conceptos básicos para la comprensión de todos los temas más avanzados de las matemáticas, y se emplea la técnica virtualmente en todos los cursos subsiguientes de álgebra y análisis.

No obstante, del álgebra, considerada como materia de enseñanza en escuelas superiores y primeros cursos universitarios, se ha hecho gran abuso. El tiempo asignado a su estudio es inadecuado con frecuencia para un régimen genuinamente bueno, y a veces no se explica o desarrolla el curso completo. Esto se debe, en parte, al deseo de que los alumnos empiecen cuanto antes los estudios del cálculo infinitesimal. También se debe, en cierto modo, a la presentación de esta asignatura, en todos los textos hasta ahora publicados, como una colección de temas aparentemente no relacionados entre sí. El deseo de enseñar el cálculo infinitesimal lo más pronto posible conduce a frustrar sus propios fines. El desarrollo de un curso de cálculo infinitesimal dedicado a estudiantes cuya preparación básica sea deficiente o insuficiente no puede ser inteligible para éstos. Además, no hay razón alguna de que el material del álgebra no sea cohesivamente organizado.

Unos quince años atrás, el autor empezó a estudiar la posibilidad de reorganizar el material de álgebra para escuelas superiores (*college algebra*) con el fin de presentarlo como un todo completo y unificado. El resultado de este estudio es el texto presente. Empezó por la formulación de lo que se entiende que debe ser el mínimo normal de exigencias para todos los textos de estas escuelas (*colleges*). Estas son las siguientes:

1. Hay que presentar el material como un conjunto unificado y ordenado de la teoría matemática.
2. Las definiciones y los teoremas han de exponerse con exactitud. Las demostraciones deben presentarse siempre que pueda esperarse que los mejores estudiantes serán capaces de comprenderlas y que sacarán provecho para el mejor entendimiento de los resultados. Donde se omita una demostración por cualquier razón o motivo, deberá hacerse constar claramente tal omisión. Las demostraciones de casos especiales de teoremas no deben ser presentadas como demostraciones de los teoremas.
3. La técnica y los conceptos importantes del texto deben hacerse destacar por la presentación de un número suficiente de ejemplos y ejercicios dirigidos a la ilustración adicional en la clase y en el estudio particular en casa. Tales ejemplos y ejercicios deben poderse resolver siguiendo las explicaciones y reglas del libro.
4. El texto debe contener una explicación suficiente en cada tema para la fácil comprensión. Parece inútil la presentación de problemas artificiosos para probar la habilidad original del estudiante en matemáticas, ya que éste puede aprovechar mejor el tiempo dedicándolo al estudio de temas más adelantados que forman parte del material del propio texto.

El lector puede juzgar por sí mismo lo bien que este texto comprende tal mínimo normal de exigencias. Parece que debieran reunirse estas condiciones y pocos textos de esta categoría de libros las reúnen actualmente.

El álgebra superior tiene una unidad básica. Consiste en un estudio de los sistemas numéricos de las matemáticas elementales, los polinomios y funciones aliadas, identidades algebraicas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. La unidad de este texto concluye ajustando los temas comprendidos en el álgebra superior a este modelo. Así el texto principia con tres capítulos sobre los sistemas numéricos.

El primer capítulo se dedica a los números naturales e introduce el concepto de contar o calcular, así como la idea fundamental de sucesión, que con tanta frecuencia aparece en matemáticas. Como las ordenaciones, permutaciones y combinaciones no necesitan más que contar, estos temas forman parte del primer capítulo.

El segundo capítulo presenta la teoría de la factorización o descomposición de enteros, el procedimiento euclidiano para hallar el máximo común divisor y una regla para hallar todos los divisores de un número entero. Estos conceptos y reglas técnicas son antecedentes necesarios de la teoría de las raíces enteras de las ecuaciones con coeficientes racionales. Aunque en la mayoría de los textos se presupone que ya los estudiantes conocen tales conceptos y reglas, en realidad no existe una base en que apoyar la suposición de que la mayor parte de los estudiantes los conozcan.

La teoría de los números racionales, reales y complejos se desarrolla en el tercer capítulo. Se presentan aquí la noción de logaritmo, de los signos de suma y producto y el concepto de una sucesión convergente de números reales. Así, este material constituye una base adelantada para el cálculo.

El capítulo cuarto consta de una introducción a la teoría puramente algebraica de los polinomios y las funciones racionales.

Los cuatro primeros capítulos comprenden, pues, no solamente lo necesario para dotar al estudiante de conocimientos nuevos, sino también material de repaso de las reglas técnicas fundamentales del álgebra elemental.

El material usualmente titulado inducción matemática se presenta aquí por lo que realmente es, una derivación de las fórmulas de la *suma* por el empleo de la inducción matemática y las identidades algebraicas. Constituye entonces la primera parte del capítulo quinto relativo a Identidades y Aplicaciones. Se incluyen también en este capítulo la identidad conocida con el nombre de *Teorema del binomio,* y las *Teorías de las progresiones,* que son simplemente aplicaciones de las fórmulas de sumas.

El capítulo sexto presenta la teoría general de las ecuaciones con polinomios como un caso especial de la teoría de la factorización (descomposición en factores primos) de los polinomios.

El capítulo séptimo sobre las raíces reales de las ecuaciones reales contiene reglas técnicas que generalmente se dan en un curso especial sobre la teoría de las ecuaciones; vale la pena que el estudiante las aprenda o haga un esfuerzo para deducirlas.

El capítulo octavo trata de los vectores en el plano y se presenta como materia opcional. Se espera que este capítulo sea una base para la futura unificación de las matemáticas superiores (*college mathematics*). El capítulo principia con una deducción de la ley del paralelogramo para la adición de vectores y la conexión de los vectores unitarios con las funciones trigonométricas. La ley del paralelogramo se usa entonces en una deducción de las fórmulas para la rotación de los ejes en la geometría analítica plana. Estas fórmulas conducen a las leyes de la adición de la trigonometría tanto como al teorema de De Moivre para los números complejos, y se utilizan para completar los conocimientos de la teoría de los radicales, que empezó en el capítulo tercero. La conexión de estos temas muestra cuan estrechamente se relacionan el álgebra superior, la trigonometría y la geometría analítica, y es de esperar que este capítulo pueda ser usado para inspirar el procedimiento mejor y más ajustado en la enseñanza de la trigonometría y la geometría analítica plana y del espacio.

El capítulo noveno contiene la teoría de los determinantes y de los sistemas lineales. Se presenta la definición inductiva de un determinante y la técnica elemental de las transformaciones para su cálculo. No hay ninguna razón para que se limite el estudiante a los determinantes de dos y tres renglones. Los sistemas de ecuaciones lineales se resuelven mejor por eliminación que por determinantes, y el capítulo no debe dar un relieve exagerado al método de los determinantes.

El capítulo último es un experimento pedagógico. Ha habido una gran demanda, de parte de economistas matemáticos y psicólogos, de que se traten pronto los temas sobre matrices y formas cuadráticas. También es muy de desear que tal estudio preceda a un curso de geometría analítica del espacio. La teoría es un tópico matemático avanzado sólo a causa de la naturaleza abstracta de sus pruebas. La experiencia personal del autor es que los teoremas y la técnica pueden enseñarse a los estudiantes jóvenes si no se intenta deducir resultados, y por ello tal presentación se ha hecho en este capítulo, siendo de esperar que satisfará las necesidades de los que se dedican a ciencias sociales, así como que será una base para el mejor tratamiento de la geometría analítica del espacio.

ADRIAN ALBERT

CHICAGO, ILL.

INDICE

ALGEBRA SUPERIOR

CAPITULO PRIMERO

NUMEROS NATURALES

1. **Introducción.** Las fórmulas matemáticas pueden compararse con piezas de maquinaria que trabajan sobre materias primas para obtener de éstas productos acabados. En este caso, tales materias primas proceden de los problemas que nos presenta el mundo físico, generalmente en forma de números. Los productos acabados son las soluciones de los problemas.

Los números que se emplean para este objeto son elementos de ciertos *conjuntos* de números designados como *sistemas numéricos*. Las propiedades de estos conjuntos son las de las materias primas. Por tanto es natural que se comience este estudio con un examen amplio de las propiedades de los sistemas numéricos.

Las fórmulas son entramados matemáticos en que entran símbolos literales. Se colocan o disponen las materias primas en las piezas de esta maquinaria matemática y se reemplazan los símbolos por números. Luego las fórmulas constan de letras y símbolos matemáticos relacionados entre sí, más bien que de números particulares. Claro está que *es solamente mediante el uso de letras para representar números no especificados que se pueden obtener resultados de algún significado general.* Por ejemplo, la igualdad $(5 + 3)\ (5 - 3) = (5 \cdot 5) - (3 \cdot 3)$ es una relación cierta, pero la igualdad formal $(a + b)$ $(a - b) = (a \cdot a) - (b \cdot b)$ denota un resultado verdadero para todos los números a y b (léase el punto en $a \cdot a$ como *veces*, o sea, *multiplicado por*).

Al usar letras como símbolos, es conveniente elegirlas de manera que sugieran cierto *orden.* Así se pueden emplear a, b y c para indicar que a es un primer número, b uno segundo y c uno tercero. De manera semejante se pueden usar a, b, c y d para cuatro números, y a, b, c, d y e para cinco. Otros conjuntos de símbolos usados de este modo son: $f, g, h, k; x, y, z; t, u, v; i, j, k, l; m, n, p, q, r, s, t, u, v.$

Algunas veces es deseable usar varios conjuntos de letras para denotar ternas de números relacionados de cierta manera. Por ejemplo, se pueden usar las letras a, b, c para una terna y A, B, C para una segunda. El número de tales sugestivas combinaciones de que se puede disponer cabe aumentarlo mediante el empleo de letras del alfabeto griego, del cual va una copia al final de este artículo.

La notación $a = b$ (que se lee "a es igual a b") se usa para indicar que los símbolos a y b representan el mismo número. Si el número representado por a es diferente del representado por b, se escribe $a \neq b$ (que se lee "a no es igual a b" o "a es diferente de b"). Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$; se escriben estas tres relaciones de igualdad en la forma $a = b = c$ (que se lee "a es igual a b es igual a c").

Muchas proposiciones o enunciados de resultados matemáticos contienen la frase *si y sólo si.* Tales proposiciones constan realmente de dos partes distintas, y expresan que una *conclusión,* es decir, una consecuencia, es válida si y solamente si una *hipótesis,* o sea, una suposición, es verdadera. Esto significa, primero, que si se hizo la suposición, la conclusión será válida, y se significa esto al decir que la suposición es una *condición suficiente.* También expresa que la conclusión no puede ser válida sin ser verdadera la hipótesis, por lo que ésta es una *condición necesaria.* Luego las dos partes de la proposición, hipótesis y conclusión, pueden llamarse *condiciones equivalentes.*

Otra expresión que se encuentra con frecuencia en las cuestiones matemáticas es la frase *existencia de un elemento único* con ciertas propiedades determinadas. Esto es asimismo una proposición doble. Primero se dice que tal elemento existe, y después se afirma que sólo un elemento tal existe. Por ejemplo, se tiene el enunciado de que el número cero posee la propiedad de que si se le añade a cualquier otro número, a, se obtiene el mismo número, a. Pero ningún otro número tiene esta propiedad, y entonces se dice que *existe un número único*, 0, *tal que* $a + 0 = a$.

En el cuadro siguiente se da el alfabeto griego.

(*May.* indica mayúscula; *Min.*, minúscula)

May.	Min.	Nombre	May.	Min.	Nombre	May.	Min.	Nombre
Α	α	Alfa	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Rho
Β	β	Beta	Κ	κ	Kappa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	My o mu	Υ	υ	Ipsilon
Ε	ε	Epsilon	Ν	ν	Ny o nu	Φ	φ	Phi o fi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	Χ	χ	Ji
Η	η	Eta	Ο	ο	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

2. Referencia de "CURSO COMPLETO" en títulos de artículos. El tiempo comúnmente asignado a un curso de álgebra superior no es suficiente para desarrollar en clase todo el material de estudio presentado en este texto. Sin embargo, parece muy conveniente que el libro contenga este material a fin de que el estudiante pueda valerse de él para fundar en una base segura su preparación para estudios más avanzados de matemáticas. Por consiguiente, se han añadido sugestiones para desarrollar plenamente el tema en aquellos artículos para cuya exposición en clase no es bastante el tiempo disponible.

Todos los artículos empiezan con el correspondiente título expresivo de su contenido y deben estudiarse totalmente en clase, con excepción de los que llevan la expresión CURSO

COMPLETO, añadida entre paréntesis, pues en este caso se presentan, por lo general, sólo como materia de lectura para la clase.

Algunas indicaciones de CURSO COMPLETO en los encabezamientos de artículos figuran en los tres capítulos primeros de la obra, en los que se trata de los sistemas numéricos del álgebra. La mayoría de los autores de textos de esta clase presupone que la materia de estudio de tales temas fue aprendida con anterioridad. Puede considerarse, en sentido muy amplio, como materia de repaso o de recapitulación. En capítulos subsiguientes, algunos artículos con la mención de CURSO COMPLETO contienen técnicas que pueden ser interesantes para los estudiantes y a las que se debe prestar atención en clase si el tiempo lo permite. La elección de tales temas adicionales se deja a la discreción del profesor. Téngase en cuenta que son totalmente de esta clase los capítulos VIII y X. Finalmente, algunos artículos de CURSO COMPLETO contienen demostraciones rigurosas y necesariamente implicadas de teoremas que se presentan, con ejercicios, en otros artículos. El autor recomienda la omisión de estos artículos.

La omisión de todos los artículos de CURSO COMPLETO no estorbará la continuidad del desarrollo de la asignatura y el texto será tan completo como los usuales de esta clase.

3. Números naturales. Los símbolos usados para contar se llaman *números naturales* o *números enteros naturales*. El conjunto de todos estos números puede concebirse como una sucesión sin fin de los símbolos

$$(1) \qquad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots$$

(leyendo los tres puntos finales, aquí y en adelante, como "etcétera"), y esta disposición *en línea* o *sucesión* es una base para la definición intuitiva del *sucesor de un número natural* como el *número natural colocado inmediatamente a la derecha* *de él* en la línea de sucesión (1). Hay que distinguir el número entero cero, 0, de todos los otros y a éstos llamarlos números *enteros positivos*. Ahora se procederá a dar lo que se llama (por los matemáticos) una *caracterización axiomática* del conjunto de todos los números *enteros positivos* en términos del concepto (indefinido) de *sucesor*. Se considerará aquí esta caracterización meramente como un enunciado de las propiedades de los números naturales.

Todo número entero positivo tiene un único entero positivo como sucesor suyo, y dos enteros tienen el mismo sucesor sólo cuando los dos son el mismo entero. El número 1 *se diferencia de todos los otros positivos enteros en que él es el único entero positivo que no es sucesor de un entero positivo.*

Ahora se completará la caracterización anterior con el muy importante *Principio de la inducción matemática.*

PRINCIPIO 1. *Sea* K *un conjunto de números enteros positivos tal que* 1 *está en* K, *y los sucesores de todos los números en* K *están en* K. *Entonces* K *es el conjunto de todos los enteros positivos.*

Este principio es el enunciado matemático formal de la noción intuitiva de que se llegará a un número entero positivo cualquiera de la citada sucesión de los números naturales si se empieza en 1 y se repite el proceso de tomar sucesores. Establece que en un argumento matemático en que se quiere mostrar que todos los números enteros positivos se pueden alcanzar, es suficiente mostrar que los dos procesos *de empezar con* 1 y *de tomar sucesores* son admisibles. Este principio se emplea con gran frecuencia en matemáticas, siendo tan natural su uso que uno es apto para hacer aplicaciones de él sin darse cuenta de que las hace.

4. Adición y multiplicación (CURSO COMPLETO). La *suma* $a + b$ de dos números naturales cualesquiera a y b puede definirse inductivamente. Se define $a + 0$ como igual a a, y $a + 1$ como el sucesor de a. Esto lleva a la introducción de la notación $a + 1$ para el sucesor de a. Se completa esta definición inductivamente definiendo

$$(2) \qquad a + (k + 1) = (a + k) + 1.$$

La aplicación intuitiva de esta definición entonces establece que para hallar la suma $a + b$ de dos números naturales cualesquiera a y b, en cada caso en que $b \neq 0$ ó 1, se usa la fórmula anterior con $k = 1, 2 \ldots$ (que se lee "k es igual a 1, 2, etc.) hasta llegar a $a + (k + 1)$ con $k + 1 = b$. Por supuesto, éste *no* es el procedimiento aritmético elemental para hallar sumas. Este último usa el concepto de *dígito* y una *tabla de sumar* los enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sin embargo. este procedimiento está basado en la definición que se acaba de dar.

El *producto* $a0$ de un número natural cualquiera a por el número 0 se define como igual a 0; el producto $a1$ de a por 1, como igual a a. Luego se define el *producto* ab, único, de dos números naturales cualesquiera inductivamente por la fórmula siguiente:

$$(3) \qquad a(k + 1) = ak + a.$$

Esta es la base del procedimiento aritmético para formar productos, que usa dígitos y una tabla de multiplicar.

5. Leyes de la adición y la multiplicación. El *sistema* de todos los números naturales es un conjunto de números en que la suma $a + b$ y el producto ab de dos números cualesquiera del conjunto son números unívocamente determinados del mismo conjunto. Todos los sistemas numéricos del álgebra elemental tienen estas dos propiedades, y en todos los casos las operaciones de adición y la multiplicación son tales que se siguen ciertas leyes. A continuación se pasa a enunciar estas leyes como propiedades de los sistemas de números, sin tratar de demostrarlas.

LEYES DE LA ADICIÓN

I. LEY CONMUTATIVA. *La adición es conmutativa, es decir, cada suma* a + b *es igual a* b + a.

II. LEY ASOCIATIVA. *La adición es asociativa, esto es, cada suma* (a + b) + c *es igual a* a + (b + c).

III. LEY DE IDENTIDAD PARA LA ADICIÓN. *El elemento* 0 *tiene la propiedad de que cada suma* a + 0 = a.

IV. LEY DE CANCELACIÓN. *Si* a + b = a + c, *entonces* b = c.

Las propiedades III y IV tienen análogas que son consecuencias de la I. De las III y I se obtiene $0 + a = a$ para cada a, mientras que de la IV y la I se ve que si $b + a = c + a$, entonces $b = c$.

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

V. LEY CONMUTATIVA. *La multiplicación es conmutativa, esto es, cada producto* ab *es igual a* ba.

VI. LEY ASOCIATIVA. *La multiplicación es asociativa, esto es, cada producto* (ab)c *es igual a* a(bc).

VII. LEY DE IDENTIDAD PARA LA MULTIPLICACIÓN. *El elemento* 1 *tiene la propiedad de que cada producto* a1 = a.

VIII. LEY DE CANCELACIÓN. *Si* ab = ac *y* a ≠ 0, *entonces* b = c.

Si a es un número cualquiera y $a + b = a$, entonces se usa la ley de identidad para la adición para obtener $a + b = a + 0$. Por la ley de cancelación para la adición se tiene $b = 0$. Así se tiene el siguiente:

Teorema 1. *Una suma* a + b = a *si y solamente si* b = 0.

Este resultado es un teorema de unicidad. Expresa que hay un número y solamente uno, b, tal que $a + b = a$. Un razonamiento parecido se hace para los productos con $a \neq 0$. Luego, si $ab = a$, se tiene $ab = a1$, $b = 1$. También, si $ab = 0$ y $a \neq 0$, se tiene $ab = a0$ y $b = 0$. Se exponen estos resultados como sigue:

Teorema 2. *Un producto* $\mathrm{ab} = \mathrm{a} \neq 0$ *si y solamente si* $\mathrm{b} = 1$. *Un producto* $\mathrm{ab} = 0$ *si y solamente si* $\mathrm{a} = 0$ *o* $\mathrm{b} = 0$.

La adición y la multiplicación se combinan en la última de las leyes:

IX. Ley distributiva. *Cualquier producto* $\mathrm{a}(\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{ab} + \mathrm{ac}$.

El lector acostumbrado al álgebra elemental siente como si no hubiese necesidad de proponer estas leyes así formalmente; sin embargo son las propiedades básicas de todos los sistemas numéricos que se tratarán y deben aprenderse formalmente como tales. Requieren por lo menos la misma atención en las aplicaciones del álgebra que las reglas consideradas como imprescindibles para las jugadas en el ajedrez o en otro juego cualquiera.

EJERCICIOS ORALES

1. ¿De cuáles leyes se puede obtener la deducción de que $(b + c)a = ba + ca$?

2. Usar las leyes para probar que $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$.

3. Intercambiar los papeles de la adición y la multiplicación en la ley distributiva y obtener una fórmula análoga *no válida* para los números.

4. Usar el resultado del ejercicio oral N° 2 para calcular $(a + b)(a + b)$ y $(a + b)(a + b)(a + b)$ como sumas de productos de las *aes* y las *bes*.

5. Si se expresa $(a + b)(c + d)(e + f)(g + h)$ como una suma, ¿cuántos términos tiene?

EJERCICIOS

1. Usando la ley distributiva, expresar las sumas siguientes como productos de dos factores:

(a)	$2x + 2y$	*(f)*	$xy + 2ay + 7y$
(b)	$xa + ya$	*(g)*	$6ax + 12bx + 3c$
(c)	$3xa + 3ya$	*(h)*	$4a + 8b + 16c + 32$
(d)	$3ab + 6ac$	*(i)*	$(x + y)2a + (x + y)3b$
(e)	$6xy + 8y$	*(j)*	$(2x + 3y + z)3x + 2(2x + 3y + z)2y$

2. Usar el resultado del ejercicio oral número 2 para expresar las sumas siguientes como productos de dos factores:

(a) $ax + by + ay + bx$
(b) $ab + a + b + 1$
(c) $6ab + 4b + 9a + 6$
(d) $2x + 2y + xy + 4$
(e) $6st + 8s + 9t + 12$
(f) $4ab + 12a + b +$ [illegible]
(g) $ac + bc + ad + bd + a + b + c + d + 1$
(h) $2ac + 4ad + 2bd + bc + 2a +$ [illegible] $c + 2d + 1$
[illegible] $ay + bx + 3xy + 12a + 4x + 2b + 6y + 8$
(j) $ax + ay + az + bx + by + bz + cx + cy + cz + a + b + c + x + y + z + 1$

6. Ordenación de los números naturales (CURSO COMPLETO). Si c y a son números naturales tales que c es la suma $a + b$ de a y un número entero positivo b, se dice que c es *mayor que a*, y se escribe

$$c > a.$$

El número c está entonces a la derecha de a en la sucesión (1) de los números naturales. Cuando a está a la izquierda de c, se dice que a es *menor que c*, y se escribe

$$a < c.$$

Todos los estudiantes deben conocer estas notaciones.

Dos números naturales cualesquiera a y c se relacionan de tal manera que una y solamente una de las propiedades $a = c$, $a > c$, $a < c$ es verdadera. Además, la relación expresada por *mayor que* se llama *relación transitiva*, es decir, si $c > b$ y $b > a$, entonces $c > a$. Se comprueba esta observación fijándose en que $c > b$ significa que $c = b + g$, donde g es un entero positivo; $b > a$ significa que $b = a + h$, donde h es un entero positivo. Entonces $c = b + g = (a + h) + g = a + (h + g)$. Como $h + g$ es positivo, $c > a$. Es costumbre indicar que $c > b$ y $b > a$ escribiendo

$$c > b > a$$

(léase "c mayor que b mayor que a"), y es importante entonces saber que esto significa también que $c > a$.

Una relación que posea las propiedades descritas en el párrafo anterior se llama una *relación de orden*, y un conjunto en el cual se tenga una relación de orden definida para toda pareja de sus elementos se llama un *conjunto ordenado*. Todos los sistemas numéricos que aquí se estudiarán, excepto el último, son ordenados. Este último sistema numérico *no ordenado* se llamará el *conjunto de todos los números complejos*.

Una notación que indica la propiedad de que a no es mayor que c es $a \not> c$ (que se lee "a no es mayor que c"). Esta propiedad tiene lugar solamente cuando $c = a$ o bien $c > a$, siendo a y c números naturales (o bien elementos de los sistemas numéricos ordenados que se considerarán más adelante). Entonces se escribe

$$c \geqq a$$

(que se lee "c es mayor que o igual a a"). En el caso de los números naturales, la condición $c \geqq a$ es equivalente a la propiedad en que $c = a + b$ donde b es también un número natural. La propiedad es idéntica a

$$a \leqq c$$

(que se lee "a es menor que o igual a c"). También si $c \geqq b$ y $b \geqq a$ se tiene $c \geqq a$, y así se escribe

$$c \geqq b \geqq a.$$

Cuando se aplican las notaciones $c \geqq 0$ y $c > 0$ a números naturales c, tales notaciones significan solamente que c es un número natural en el primer caso y que c es un entero positivo en el caso último.

La relación $c \geqq a$ se llama *desigualdad*. Cuando se tiene una relación de tal naturaleza y se muestra que se puede reemplazar por $c > a$, se dice que se tiene una desigualdad *reforzada*. Así, $c > a$ se llama una *desigualdad fuerte*, y $c \geqq a$ una *desigualdad débil*. Las desigualdades $c \geqq b \geqq a$ implican la igualdad $c = a$ si y solamente si ninguna de las desigualdades $c \geqq b$ y $b \geqq a$ es una desigualdad fuerte.

El principio de la inducción matemática puede enunciarse en otras dos formas útiles que deben aprenderse a título de CURSO COMPLETO. Son las siguientes:

PRINCIPIO 2. *Sea* K *un conjunto de números enteros positivos que contenga el número* 1. *Supóngase que siempre que un entero* n *es tal que todos los enteros menores que* n *están en* K, *entonces* n *está en* K. *Entonces* K *es el conjunto de todos los enteros positivos.*

PRINCIPIO 3. *Cada conjunto de números enteros positivos contiene un entero mínimo.*

El principio 3 expone que en cada conjunto K de números enteros positivos hay un entero c tal que si k es un entero de K, entonces $k \geqq c$. No se tratará aquí de obtener cada una de las tres formas del principio de inducción matemática a partir de uno cualquiera de ellos.

7. Sustracción (CURSO COMPLETO). Siempre que $c \geqq a$, hay un número natural b tal que $c = a + b$. Ese número se llama *diferencia* entre c y a, y se escribe

$$b = c - a \tag{4}$$

(se lee "b es igual a c menos a"), y se dice que b es el resultado de *restar* a de c. Si $a = c$, la diferencia

$$c - a = 0. \tag{5}$$

Por otra parte, $b = c - a$ es un número entero positivo.

Si $c = b + g$ y $b = a + h$, entonces $c = (g + h) + a$ y $c - a = g + h$. Cuando $h > 0$, se tiene $g + h > g$, $b - a = h$, $c - a > b - a$. En cualquier caso $c - a \geqq b - a$, y se tiene el resultado que se enuncia como sigue:

Teorema 3. *Sean* a, b, c *números naturales tales que* $c \geqq b \geqq a$. *Entonces* $c - a \geqq b - a \geqq 0$ *y* $c - a > b - a$ *si* $c > b$.

Es muy importante recordar que si $a > c$ la diferencia $c - a$, como número natural, *no existe*. En el capítulo II se extenderá el sistema numérico de tal manera que en el nuevo sistema habrá todas las diferencias $b - a$. Recuérdese que $c - a$ representa un número b tal que $c = a + b$.

8. División. Sean a y b números naturales. Entonces se dice que b divide a a si existe un número natural c tal que

$$(6) \qquad a = bc.$$

Cuando sucede esto, se dice que b es un *factor* o *divisor* de a y que a tiene una *factorización* $a = bc$. Entonces c es también un factor de a.

Si $b = 0$, el único número natural a tal que $a = 0c$ es $a = 0$. Por lo tanto, 0 *no divide a ningún número, excepto a sí mismo*. Por otro lado, si $a = 0$, entonces $a = b0$ para cualquier b. Luego, *cualquier número natural divide al cero*. De esto se deduce que el símbolo

$$\frac{a}{b},$$

que se llama el *cociente* c de $a = bc$ entre b, *no tiene significado* cuando $b = 0$ y $a \neq 0$. Además, cuando $a = b = 0$, este cociente representa *todos* los números naturales. En la solución de un problema mediante una división se requiere que a la vez la respuesta *exista* y *que sea única*, y cuando $b = 0$ no se satisface alguno de estos requisitos. Esto es lo que se conoce como el principio de que la *división entre cero es imposible*.

Cuando $b \neq 0$, el cociente c es único. Por la ley de la cancelación para la multiplicación se establece que si $b \neq 0$ y $a = bc = bd$, entonces $c = d$. Sin embargo, puede no existir c en la serie de los números naturales. Por ejemplo, tómese $a = 1$ y $b = 2$. Este es el motivo de la extensión que se dará en el capítulo III al conjunto de los enteros para obtener un sistema de números que incluya todos los cocientes y llamado el conjunto de *todos los números racionales* o de *todas las fracciones*.

9. Potencias. La distinción esencial entre los productos ab y ba consiste en el *orden* de los dos factores a y b. La diferenciación entre $a(bc)$ y $(ab)c$ consiste en el *agrupamiento* de los factores. Las leyes conmutativa y asociativa se pueden combinar y extender a productos con cualquier número de factores, como se establece en el siguiente:

Teorema 4. *El valor de cualquier producto es independiente tanto del orden como del agrupamiento de los factores.*

En forma semejante se ve que *el valor de cualquier suma es independiente tanto del orden como del agrupamiento.* Si hay juntamente sumas y productos, el valor depende de la lectura de la expresión que se hará como una suma de productos (los productos podrían contener sumas) y del uso de la ley distributiva.

En un producto de n factores todos iguales a a, la independencia de los agrupamientos implica la existencia de un valor común para todos estos productos. Este valor se denomina la *enésima potencia* de la base a y se designa por

$$a^n$$

(léase "a a la enésima potencia"). Aquí n es cualquier entero positivo y se llama el *exponente* de la potencia a^n. Por ejemplo, se establece que el valor común de $(aa)(aa) = a[a(aa)] = a[(aa)a] = [a(aa)]a$ es a^4. Así, cualquier potencia de 0 es 0. De modo que no será necesario considerar potencias de cero, ya que con sólo que un factor sea cero, el producto es cero. En lo sucesivo, los productos comprendidos en este artículo serán considerados como productos de enteros positivos.

Esta definición de potencias se extiende diciendo (no comprobando) que

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0). \tag{7}$$

Por lo tanto, ya se ha definido a^n para cada número natural n y para todos los enteros positivos a. Un producto bc de $b = a^n$ y $c = a^m$ es el producto de $m + n$ factores todos iguales a a. Por el teorema 4 se tiene la primera ley de los exponentes, expresada simplemente como

$$(8) \qquad a^n a^m = a^{n+m}.$$

Esta fórmula se puede expresar con palabras diciendo que *el exponente del producto de potencias del mismo número es la suma de los exponentes de los factores.*

Un producto c^m de m factores todos iguales a $c = a^n$ es el producto de $n + n + \ldots + n$ (léase "n más n, y así sucesivamente, más n") factores a. En esta suma hay m términos y, por lo tanto, su valor es nm. Luego,

$$(9) \qquad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Nótese finalmente que $a^n b^n$ es el producto de n factores a y el mismo número de factores b. El producto $(ab)^n$ tiene exactamente los mismos factores que $a^n b^n$, pero con distinto orden de agrupamiento. Por el teorema 4 se tiene la tercera ley de los exponentes

$$(10) \qquad a^n b^n = (ab)^n.$$

Es decir, la ***enésima potencia de un producto es el producto de las enésimas potencias de los factores.*** Esta ley se deriva aquí para todos los números naturales n.

EJERCICIOS

1. Los siguientes productos se pueden expresar como productos de las potencia de 2, 3, 5, 7 por medio de la factorización y del uso de las leyes de los exponentes. Dar las expresiones:

a) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 4 \cdot (14)^8 \cdot (35$
b) $(10)^4 \cdot 8^3 \cdot 9^2$
c) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 7^5)^6$
d) $(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^5)^2 \cdot [2 \cdot 9 \cdot (70)]^3$
e) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (49) \cdot (25) \cdot 8 \cdot 6 \cdot (24) \cdot (21) \cdot (28) \cdot (105)$

2. Usese la fórmula (9) y hállese un entero positivo x tal que

a) $2^4 3^6 5^2 = x^2$
b) $2^3 3^6 5^{15} = x^3$
c) $16(2^2 3^3)^4 = x^4$
d) $2^3 3^4 (x^2)^3 = 3(x^3)^3$
e) $8 \cdot 3^6 (y^2 z^2)^3 = x^3, y^3 = 27, z^2 = 25$

10. Resumen. En los artículos anteriores se definió el concepto de los números naturales y se explicó cómo se realizan las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división de los mismos. También se presentaron las propiedades fundamentales de este sistema numérico que consta de todos los números naturales con nueve leyes de la adición y multiplicación y se obtuvieron tres leyes consecuentes de éstas para los exponentes. Se demostró que este sistema numérico era ordenado y se dieron el principio de la inducción matemática y dos consecuencias. Finalmente se definieron los términos *diferencia* y *factor* (o *divisor*) y se observó que la sustracción y la división de los números naturales no es siempre posible.

En estos artículos únicamente se presentaron los ejercicios anteriores relativos a las leyes de los exponentes y a la ley distributiva. Posteriormente se presentarán algunos ejercicios referentes a los cambios de paréntesis, corchetes y llaves para el uso de las leyes fundamentales.

EJERCICIOS ORALES DE REPASO

1. Enúnciese el principio de la inducción matemática y sus dos sustituciones.

2. Sea K un conjunto de enteros pares. ¿De qué dos hipótesis se desprendería, por el principio de la inducción matemática, que K es el conjunto de todos los enteros pares?

3. ¿De qué dos hipótesis se seguiría que un conjunto de enteros nones es el conjunto de todos los enteros nones?

4. Enúnciense las cuatro leyes de la adición.

5. Enunciar las cuatro leyes de la multiplicación.
6. Dar todos los agrupamientos posibles del producto $abcd$.

11. Sucesiones finitas. El resto de este capítulo abarcará únicamente temas relativos a la *numeración* que requieran el uso único de números naturales. Los conceptos de numeración presentados en este artículo son de la mayor importancia en las matemáticas.

El procedimiento usado en la numeración de los objetos de un conjunto de cinco objetos se puede describir en términos de una notación que tiene muchos usos en esta materia. Se empezará por escoger el primer objeto y representarlo por el símbolo a_1 (léase "a subuno" o simplemente "a uno"). Entonces se puede pensar en a_1 como en el nombre del primer objeto. El segundo objeto se denominará a_2, después se designarán el tercero con a_3, el cuarto con a_4 y el restante con a_5. De esta manera se acaba el conjunto, esto es, se emplean todos sus elementos (o sea, objetos) y también se completa la enumeración. Este proceso de enumeración se conoce como el de *establecer una correspondencia* entre los cinco objetos y los enteros 1, 2, 3, 4, 5. La correspondencia es *biunívoca*, o sea, cada objeto tiene que corresponder precisamente a un entero positivo, y cada uno de los enteros positivos a un solo objeto.

La notación usada se puede emplear cuando se tiene un conjunto de n objetos, donde n es cualquier entero positivo no especificado. En este caso, el conjunto es designado de tal manera que los nombres de sus objetos son

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{11}$$

(léase "a_1, a_2, hasta a_n"). Aquí a_1 es el primer objeto, a_2 es el segundo, a_n es el último o el enésimo. Los tres puntos representan objetos numerados pero que no pueden mencionarse explícitamente porque *no se ha especificado* n. Un renglón de símbolos como los de la fórmula (11) es usualmente llamado *sucesión finita* (o sólo *sucesión*), y los símbolos a_1, a_2, y así sucesivamente, sus *términos*. Se puede sustituir la letra a por la b y usar la notación $b_1, b_2, \ldots, b_n$, o bien $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Desde luego, pueden usarse otras letras.

Para referirse a un término *arbitrario* de una sucesión (11), se dice el i-ésimo *término*. Este es el término a_i, donde i es el símbolo que representa a cualquiera de los enteros 1, 2, ..., n. Este término también se llama *término general* de la sucesión. Puede no usarse la letra i y hablar del j-ésimo término, a_j, o del k-ésimo término, a_k. Es importante comprender que, aun cuando a_i es cualquier término, la i se usa para representar la numeración suscrita, esto es, un entero positivo. Los símbolos para representar los enteros se limitan generalmente a $i, j, k, m, n, p, q, r, s$, o t. Se pueden emplear otras letras, pero la x, y, z son raramente usadas para este propósito.

A veces, con el término a_i se hace referencia a cada uno de los términos de una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Por ejemplo, puede desearse indicar que todos los términos son enteros. Entonces se dice que *todos los términos a_i son enteros*. Posteriormente se dirá que, *a partir de cierto lugar*, a_i tiene cierta propiedad. Esto significa que hay un entero positivo k tal que todo a_i tiene la propiedad indicada para todos los enteros $i \geqq k$.

En la *notación* de una sucesión se tiene el término a_2. Sin embargo, se debe aclarar que si posteriormente se especifica que $n = 1$, la consecuencia será que $a_1 = a_2 = a_n$.

En la teoría de los polinomios, que se tratará más adelante, será preferible empezar las sucesiones con el símbolo a_0 más bien que a_1. La notación para tales sucesiones será:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n. \tag{12}$$

Aquí a_0 es el primer término, a_1 es el segundo, a_i es el término $(i + 1)$, a_n es el término $(n + 1)$. La sucesión tiene $n + 1$ términos. También se puede escribir

$$a_5, a_6, \ldots, a_n \tag{13}$$

para representar una sucesión en que $n \geqq 5$ y en que el número de términos no es n sino $n-4$. Por ejemplo, se puede querer hablar de la sucesión que conste de todos los términos de la fórmula (11) que están después de a_4.

La notación

(14) $$a_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(léase "a_i para i igual de uno a n") puede ser empleada en vez de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y la notación

$$a_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

en lugar de $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Así, se puede usar la notación

(15) $$a_i \qquad (i = 5, \ldots, n)$$

para la sucesión $a_5, a_6, \ldots, a_n$.

Las notaciones para las sucesiones se pueden aplicar a muchos casos. Un ejemplo es el de la notación que se puede emplear para los dígitos de un entero positivo α de n dígitos. Se escribe

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Entonces a_1 es el dígito del extremo izquierdo, a_2 es el siguiente, y así sucesivamente. En este caso todo a_i es un entero cualquiera de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y a_1 no es cero.

En el caso anterior, α es un símbolo que denota toda la sucesión de n objetos, lo que se indica poniendo la sucesión entre paréntesis.

Al final del artículo siguiente se incluyen ejercicios para probar si el estudiante comprendió la notación de las sucesiones.

12. Sucesiones infinitas. Se puede considerar que existen sucesiones que *no tienen fin*, las cuales se denominan *sucesiones infinitas*. Una de estas sucesiones es la de los números naturales dada por la fórmula (1).

Las sucesiones infinitas representan conjuntos de objetos que no pueden ser contados en el sentido de los procesos de notación limitados, pero que son numerables porque pueden ponerse en correspondencia biunívoca con la serie de todos los enteros positivos. Tales conjuntos se denominan *numerables* y sus objetos forman sucesiones infinitas

$$(16) \qquad a_1, a_2 \ldots$$

(léase "a_1, a_2, y así sucesivamente"). El término general de una sucesión infinita usualmente se designa por a_n (mejor que por a_i). Como anteriormente, se pueden usar b_1, $b_2 \ldots$, o a_0, $a_1 \ldots$, o

$$(17) \qquad a_n \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

(léase "n igual a 1, 2, y así sucesivamente"), o finalmente

$$(18) \qquad a_n \qquad (n = 0, 1 \ldots).$$

Las notaciones de las sucesiones son tan frecuentemente empleadas en álgebra que es de gran importancia para los estudiantes conocerlas perfectamente. Con el fin de obtener la facilidad deseada, a continuación se presentan los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS ORALES

1. Qué es n y qué son a_1, $a_2 \ldots$, a_n para las siguientes sucesiones finitas:

(a) 1, 3, 5, 7, 9, 11
(b) 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6
(c) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
(d) 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2

2. Dar la fórmula para el término a_n de las siguientes sucesiones infinitas:

(a) 1, 2, 3, 4, 5,... (la sucesión de enteros positivos)
(b) 2, 4, 6, 8, 10... (la sucesión de enteros positivos pares)
(c) 0, 2, 4, 6,... (la sucesión de números naturales pares)
(d) 1, 6, 11, 16,... (la sucesión cuyos números difieren en cinco).

EJERCICIOS

1. Enumerar los valores de a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de las sucesiones cuyos términos generales se dan por las siguientes fórmulas:

(a) $a_n = 2n$
(b) $a_n = 3n + 2$
(c) $a_n = 3n - 1$
(d) $a_n = n(n + 1)$
(e) $a_n = (2n + 1)(3n - 1)$
(f) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ para $n > 1$, $a_1 = 1$
(g) $a_n = na_{n-1}$ para $n > 1$, $a_1 = 2$
(h) $a_n = 2a_{n-1}$ para $n > 1$, $a_1 = 2$
(i) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$
(j) $a_n = a_1 + a_2$ para $n > 2$, $a_1 = a_2 = 1$

2. Sea una sucesión b_0, $b_1, \ldots$ tal que $b_0 = a_1$, $b_n = a_{n+1}$ para cada una de las sucesiones del ejercicio 1. Escríbanse las fórmulas correspondientes para b_n.

3. Escríbanse los términos quinto, sexto, séptimo, octavo y noveno de la sucesión b_1, $b_2 \ldots$ formada de cada una de las sucesiones del ejercicio 1 por el empleo de las fórmulas $b_1 = a_1$, $b_n = 2a_n - a_{n-1}$ para toda $n > 1$.

4. A continuación se dan los seis primeros términos de una sucesión. Hállese la fórmula para a_n en función de n que satisfaga estos términos.

(a) 1, 4, 7, 10, 13, 16
(b) 5, 9, 13, 17, 21, 25
(c) $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 3$, $5 \cdot 4$, $6 \cdot 5$
(d) 0, $3 \cdot 1$, $4 \cdot 2$, $5 \cdot 3$, $6 \cdot 4$, $7 \cdot 5$
(e) $2 \cdot 1$, $4 \cdot 3$, $6 \cdot 5$, $8 \cdot 7$, $10 \cdot 9$, $12 \cdot 11$
(f) 6, 6, 6, 6, 6, 6
(g) 1, 3, 5, 7, 9, 11
(h) 3, 5, 7, 9, 11, 13

5. Usénse las fórmulas obtenidas en cada uno de los incisos del ejercicio 4 y hállense los valores de a_{10} y la fórmula para a_{k+1}.

6. Los términos de una sucesión finita de seis términos son 1, 2, 5, 3, 4, 2. Definir una nueva sucesión b_1, $b_2, \ldots$, b_6 con $b_1 = a_1$, $b_n = a_n + rb_{n-1}$ para $n > 1$. Hallar los términos de la sucesión de b_n si

(a) $r = 1$
(b) $r = 2$
(c) $r = 4$
(d) $r = 10$
(e) $r = 0$
(f) $r = 5$

13. Numeración de parejas. La notación en las sucesiones se puede usar para contar el *número de parejas* de objetos cuando el primer objeto en la pareja puede ser uno cualquiera de n objetos dados y el segundo uno cualquiera de m objetos también dados. Los objetos del primer conjunto se designan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y los del segundo, $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Entonces los pares son (a_i, b_j), donde i tiene cualquier valor entre 1 y n y j cualquier valor entre 1 y m. Existen entonces m *conjuntos de parejas* y cada uno de ellos consta de n parejas (a_1, b_j), $(a_2, b_j), \ldots, (a_n, b_j)$. Por tanto, hay nm parejas en conjunto.

En un caso especial se pueden numerar las parejas (a, b). Hágase así en el caso en que a puede ser cualquiera de los enteros 1, 2, 3, 4, 5, y b cualquiera de los enteros 6, 7, 8. Entonces las parejas se encuentran en tres conjuntos, cada uno de los cuales consta de cinco parejas. El primer conjunto consta de las parejas (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6); el segundo conjunto, de (1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 7), (5, 7), y el último, de (1, 8), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8). Hay, en total, $15 = 5 \cdot 3$ parejas.

El resultado anterior se usa en la práctica ordinaria de contar parejas de sucesos. Se enunciará éste como sigue:

Principio fundamental de numeración. *Supóngase que un acontecimiento pueda ocurrir de* n *maneras, y después que haya ocurrido, un segundo acontecimiento pueda ocurrir de* m *maneras. Entonces el número de maneras en que la sucesión de los dos eventos puede ocurrir es* nm.

El resultado se puede extender a grupos de tres, cuatro, o más sucesos. En cada caso el número de modos en que la sucesión de acontecimientos puede ocurrir es el producto de los números de los modos en que cada acontecimiento puede ocurrir.

No se puede exagerar al decir que la manera de hacer cualquier trabajo de numeración *depende de lo que se esté contando.* Si se tienen dos conjuntos mutuamente exclusivos de sucesos y se está únicamente interesado en contar estos sucesos, *se suman* los números de sucesos en cada conjunto.

Pero si se cuentan *parejas* de sucesos, *se multiplican* los números. En el caso especial descrito anteriormente son en total $8 = 5 + 3$ enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Pero hay $15 = 5 \cdot 3$ parejas. Algunos de los ejemplos dados a continuación combinan ambos tipos de enumeración.

Ejemplos ilustrativos

I. Un hombre que vive en Chicago puede ir a Minneapolis en avión, tren o camión, pero sólo puede regresar en camión o tren. También puede ir a Milwaukee en tren, barco, camión, coche o avión y regresar en tren, automóvil o avión. ¿De cuántas maneras distintas le es posible hacer el viaje redondo?

Solución

Se contará el número total de viajes redondos. Por el principio fundamental de numeración existen $6 = 3 \cdot 2$ viajes redondos posibles a Minneapolis y hay $15 = 5 \cdot 3$ viajes redondos a Milwaukee. El número total de viajes redondos es $21 = 6 + 15$.

II. ¿Cuántos viajes distintos le era posible realizar al hombre del ejemplo anterior? Hay que aclarar que un viaje de Minneapolis a Chicago en tren no es lo mismo que uno de Chicago a Minneapolis en tren.

Solución

En este problema se cuentan los viajes sencillos, no los redondos. Hay $3 + 2 + 5 + 3 = 13$ viajes.

EJERCICIOS

1. El primer dígito de un número natural a de n dígitos no puede ser cero a menos que $n = 1$ y $a = 0$. Usese esto para hallar la cantidad de

(a) números de cuatro dígitos

(b) números pares de cuatro dígitos (es decir, de dígito final 0, 2, 4, 6, 8)

(c) números pares de tres, dos o un dígito.

2. En una placa para rótulos caben dos letras seguidas de un número de cuatro dígitos, el primero de los cuales no es cero. ¿Cuántas placas con diferentes rótulos se pueden hacer?

Resp.: 6 084 000.

3. ¿Cuántas palabras* de cuatro letras se pueden formar si las dos primeras letras son cualquier consonante y las dos segundas cualquier vocal? (Considérense como vocales *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, y *y*).

4. ¿Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar si la primera letra y la última son cualesquiera de las siguientes, *b*, *c*, *d*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, las segundas y las cuartas letras son cualquier vocal, y la de en medio son cualesquiera de *g*, *h*, *j*, *k*, *l*, *m*? *Resp.*: 13 824.

5. Una colección de pinturas contiene cinco retratos del siglo XIX, ocho paisajes y seis cuadros modernos. Se desea presentar una exhibición que contenga una pintura de cada clase. ¿Cuántas exhibiciones que difieran por lo menos en una pintura se pueden seleccionar?

6. Un estudiante cursa inglés, química y matemáticas, y puede obtener una cualquiera de las calificaciones *A*, *B*, *C*, *D*, *F* en cada materia. ¿Cuántos conjuntos distintos de tres calificaciones puede obtener? *Resp.*: 125.

7. Un dispositivo para señales consta de cuatro filas de luces y cada fila tiene una luz roja, otra ámbar y la tercera, verde. Una señal consta de una luz en la fila superior, o una luz en cada una de las dos filas superiores, o una luz en cada una de las tres filas superiores, o una en cada una de las cuatro filas. ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer con este sistema?

8. Un comandante de una compañía tiene bajo su mando cinco pelotones de nueve hombres cada uno. Destina un hombre de cada pelotón para un trabajo especial. ¿Cuántos grupos diferentes puede seleccionar? *Resp.*: 9^5.

9. Una mujer tiene 15 pañuelos diferentes, 8 sombreros diferentes y 4 pares diferentes de guantes. Desea hacer una selección de uno de cada una de estas clases de objetos para un día determinado. ¿Cuántas selecciones diferentes puede hacer?

10. ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar de los dígitos 1, 2, 3, 4, 7, 8 si los dos dígitos de los números deben ser diferentes? *Resp.*: 30.

11. Dos hombres cruzan separadamente un río. El primero puede usar una cualquiera de cinco barcas distintas y el segundo una cualquiera de las restantes. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escoger los dos hombres las barcas?

* Aquí se entenderá por "palabra" simplemente una colección de letras, como en las combinaciones para una clave. (N. del T.)

14. Factoriales. Es útil tener un símbolo para representar el producto de los primeros n enteros positivos. Se define, por tanto,

$$(19) \qquad n! = n(n-1)\,(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1,$$

y el símbolo $n!$ se lee *"factorial de n"*. Entonces se tienen los valores

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120,$$

y así sucesivamente. Algunos autores usan en lugar de $n!$ el símbolo $\underline{|n}$. Es también conveniente introducir la convención de que la factorial de cero tenga el valor 1.

Ya que $n!$ es el producto de los primeros n enteros, está claro que si r es un entero positivo menor que n, el producto $r!$ de los primeros r enteros es un factor de $n!$. En efecto, se tiene

$$(20) \qquad n! = n(n-1)\ldots(r+1)\cdot r!.$$

Luego el número $n(n-1)\ldots(r+1)$ es el producto de los $n-r$ factores expuestos *mayores* de $n!$. La diferencia $n-r$ es también menor que n y se puede reemplazar r por $n-r$ en la fórmula anterior para obtener

$$(21) \qquad n! = n(n-1)\ldots(n-r+1)\cdot(n-r)!.$$

Se usará el símbolo $O_{n,r}$ (léase O, n, r) para el producto de los factores a la izquierda de $(n-r)!$ de la fórmula (21), y por tanto se definirá el entero

$$(22) \qquad O_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1),$$

que es el producto de los r enteros $n, n-1, n-2, \ldots, n-(r-1)$. Nótese que el último de estos factores es $n-r+1$.

Ya se ha visto que $n!$ es divisible a la vez entre $r!$ y entre $(n-r)!$ para cualquier $r < n$. De hecho $n!$ es divisible por su producto, resultado que se verá en el artículo siguiente. Se introducirá la notación

$$(23) \qquad C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

siendo el cociente un entero.

Si se sustituye r por $n-r$ en $C_{n,r}$, se obtiene $C_{n,n-r}$. Entonces $r!$ será $(n-r)!$, y $(n-r)!$ será $s!$, en donde

$$s = n - (n-r) = r.$$

Así, pues,

$$(24) \qquad C_{n,r} = C_{n,n-r}$$

para todos los valores de $n > 1$ y $r < n$. La fórmula

$$(25) \qquad C_{n,r} = \frac{O_{n,r}}{r!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

es una consecuencia inmediata de estas definiciones. El numerador es el producto de los r enteros obtenidos empezando con n y disminuyendo en 1 hasta un total de $r-1$ veces. Este producto se puede obtener por el simple proceso de numerar estos r factores. En forma semejante, el denominador es el producto de r factores obtenidos empezando con r y disminuyendo en 1 un total de $r-1$ veces. Por ejemplo,

$$C_{11,6} = \frac{11 \cdot \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 11 \cdot 7 \cdot 6 = 462 = C_{11,5}.$$

¿Cómo se puede obtener entonces el cociente $C_{80,78}$ de dos productos de 78 factores cada uno? Usando la fórmula (24) se tiene

$$C_{80,78} = C_{80,2} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 40 \cdot 79 = 3\,160.$$

Problemas ilustrativos

I. Hallar n si $C_{n,3} = 84$.

Observaciones. El problema requiere que n sea un número natural tal que

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 84, \qquad n(n-1)(n-2) = 504.$$

Entonces $n^3 > n(n-1)(n-2) > (n-2)^3$ y n es un número natural para el cual 504 está comprendido entre $(n-2)^3$ y n^3. Obsérvese que un problema como éste puede no tener una solución. Por ejemplo, el problema de hallar n tal que $C_{n,3} = 85$ no tiene solución.

Solución

Se calculan los cubos

$$2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125, \quad 6^3 = 216,$$
$$7^3 = 343, \quad 8^3 = 512, \quad 9^3 = 729.$$

Las únicas soluciones posibles de este problema son $n = 8$, 9 y se comprueba que

$$C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

II. Hallar n si $O_{n,9} = 42\, O_{n,7}$.

Solución

El entero $O_{n,9}$ tiene nueve factores, el producto de cuyos siete primeros es $O_{n,7}$. Entonces $O_{n,9} = O_{n,7}(n-7)(n-8)$. Aquí el factor final es $n - r + 1$ donde $r = 9$. Luego $O_{n,7}(n-7)(n-8) = 42O_{n,7}$, $(n-7)(n-8) = 42$. El producto de dos enteros consecutivos igual a 42 es $7 \cdot 6$ y $n - 7 = 7$, $n = 14$.

III. Hallar n y r si $O_{n,r} = 15\,120$, $C_{n,r} = 126$.

Solución

$O_{n,r} = (r!)C_{n,r}$, de manera que

$$r! = \frac{15\,120}{126} = 120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 3 \cdot 20 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

$r = 5$. Luego $O_{n,5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 15\,120$. Una tabla de valores de $O_{n,5}$ para $n \geqq 5$ da $O_{5,5} = 120$; $O_{6,5} = 720$; $O_{7,5} = 2\,520$; $O_{8,5} = 6\,720$; $O_{9,5} = 15\,120$. Por lo tanto, $n = 9$, $r = 5$.

EJERCICIOS ORALES

Expresar el primero do los siguientes números en términos del segundo (usando productos o cocientes):

1. $8!, 6!$
2. $6!, 8!$
3. $10!, 9!$
4. $10!, 8!$
5. $9!, 6!$
6. $6!, 7!$
7. $O_{6,5}, O_{6,4}$
8. $O_{n,r}, O_{n,r-1}$
9. $n!, O_{n,n-1}$
10. $O_{n,5}, C_{n,5}$

EJERCICIOS

1. Simplificar las siguientes expresiones escribiendo el resultado como un entero múltiplo de $n!$ para n tan grande como sea posible:

(a) $8! - 4 \cdot 6!$

(b) $3 \cdot 9! - 12 \cdot 8!$

(c) $8 \cdot 5! - 6!$

(d) $12 \cdot 8! - 7 \cdot 6!$

(e) $3 \cdot 7! - 2 \cdot 6!$ *Resp.:* $19 \cdot 6!$

(f) $4 \cdot 7! - 6 \cdot 5!$ *Resp.:* $27 \cdot 6!$

(g) $3!6! + 7!$ *Resp.:* $13 \cdot 6!$

(h) $(4!)^2 + 2 \cdot 6!$ *Resp.:* $84 \cdot 4!$

2. Calcular

(a) $O_{5,3}$

(b) $C_{5,3}$ *Resp.:* 10.

(c) $\dfrac{O_{9,7}}{O_{8,4}}$

(d) $\dfrac{2\,O_{10,5}}{O_{9,6}}$ *Resp.:* 1.

(e) $\dfrac{O_{11,8}}{33\,O_{7,6}}$

(f) $\dfrac{5\,C_{9,6}}{C_{8,4}}$ *Resp.:* 6

(g) $\dfrac{7\,C_{8,7}}{C_{7,6}}$

(h) $\dfrac{5\,C_{9,5}}{3\,C_{10,4}}$ *Resp.:* 1.

(i) $\dfrac{91\,O_{12,5}}{O_{10,3}C_{14,3}}$

(j) $\dfrac{8\,C_{15,6}O_{5,3}}{O_{14,5}}$ *Resp.:* 10.

3. Hallar n si

(a) $O_{n,2} = 110$

(b) $C_{n,2} = 28$ *Resp.:* 8.

(c) $O_{n,3} = 60$

(d) $O_{n,3} = 1\,716$ *Resp.:* 13.

(e) $C_{n,3} = 364$

(f) $C_{n,3} = 220$ *Resp.:* 12.

(g) $O_{n,5} = 42\,O_{n,3}$

(h) $O_{n,3} = 12\,C_{n-1,2}$ *Resp.:* 6.

(i) $5\,C_{n,5} = 8\,C_{n-1,4}$

(j) $18\,C_{n-1,4} = 15\,C_{n,6}$ *Resp.:* 9

4. Hallar r si

(*a*) $O_{19,r} = 5\,814$ (*c*) $C_{17,r} = 12\,376$
(*b*) $O_{17,r} = 272$ *Resp.:* 2. (*d*) $40\, C_{15,r} = 51\, C_{16,r}$ *Resp.:* 2.

5. Hallar n y r si

(*a*) $O_{n,r} = 840,\ C_{n,r} = 35$
(*b*) $O_{n,r} = 11\,880,\ C_{n,r} = 495$
(*c*) $r! = 6,\ O_{n,r} = 210$ *Resp.:* $n = 7,\ r = 3$.
(*d*) $n! = 5\,040,\ C_{n,r} = 35$ *Resp.:* $n = 7,\ r = 3$.

6. Demostrar que $C_{n,r} + C_{n,r-1} = C_{n+1,r}$.

7. Calcular los valores de la expresión $2^{2^n} + 1$ para $n = 1, 2, 3, 4$. (Estos enteros están ligados con el número de lados de un polígono regular que se puede construir con regla y compás.)

8. Si los catetos de un triángulo rectángulo tienen las longitudes a y b siendo c la longitud de su hipotenusa, el *teorema de Pitágoras* establece que $a^2 + b^2 = c^2$. Se sabe que todos los casos en que a, b, c son enteros primos entre sí, están dados por las fórmulas

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2,$$

donde m y n son enteros positivos, uno de ellos es par y el otro impar, $m > n$. Calcular a lo menos cuatro conjuntos diferentes de valores de a, b, c.

15. Ordenaciones, permutaciones y combinaciones. La teoría de las combinaciones está relacionada con los métodos de contar el número de maneras en que un subconjunto de objetos de un conjunto finito dado puede ser elegido, o elegido y ordenado, en una sucesión.

Se llaman *ordenaciones* de n objetos tomados de r en r a las distintas colecciones de r objetos que se pueden formar con los n objetos dados considerando distintas dos de estas colecciones cuando o consten de elementos distintos o bien los elementos, aun siendo iguales, ocupen un lugar distinto.

Se llaman *combinaciones* de n objetos tomados de r en r a las distintas colecciones de r objetos que se pueden formar con los n objetos dados considerando distintas dos colecciones únicamente cuando no consten de los mismos elementos.

Se llaman *permutaciones* de n objetos a las ordenaciones de n elementos tomados de n en n. Se demostrará más adelante que el número de permutaciones de n objetos es $n!$.

Es evidente que el número de combinaciones de n objetos tomados de n en n es igual a uno.

Considérese ahora el sencillo ejemplo de tres objetos: a, b, c. Sus *permutaciones* son: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Así hay $6 = 3!$ permutaciones. Si se cuentan las *ordenaciones* agrupando dos objetos a la vez, se ve que se pueden seleccionar a, b, o a, c o b, c para esos pares. Las ordenaciones correspondientes son (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), habiendo $3 \cdot 2 = O_{3,2}$ de tales ordenaciones.

Se va a proceder ahora a contar el *número de ordenaciones de* n *objetos tomados de* r *en* r. Como primer objeto de la colección de r objetos se puede elegir uno cualquiera de los n objetos. Después de haber elegido y usado tal objeto, solamente quedarán $n - 1$ objetos para elegir el segundo. Por el principio fundamental de numeración hay $n(n - 1)$ maneras de llenar los dos primeros lugares de la colección. Quedan $n - 2$ objetos y de este modo el tercer término puede ser elegido en $n - 2 = n - (3 - 1)$ maneras. Entonces hay $n(n - 1)$ $(n - 2)$ maneras para seleccionar los tres primeros términos de la colección. Después de r pasos análogos, se llega al último factor $n - (r - 1) = n - r + 1$, y de este modo el *número de ordenaciones de* n *objetos tomados de* r *en* r *es el entero* $O_{n,r}$ *de la fórmula* 22. En el caso especial en que $r = n$ se tiene $O_{n,n} = P_n = n!$. Nótese que n y r son enteros y que $0 < r \leqq n$.

El *número de combinaciones de* n *objetos tomados de* r *en* r puede calcularse agrupando las ordenaciones $O_{n,r}$ en subconjuntos cada uno de $r!$ ordenaciones. Considérese primero el caso ilustrativo especial de combinaciones de cuatro objetos tomados de tres en tres.

La selección de tres objetos de los cuatro que hay, se obtiene por la *exclusión* de *uno* del total. Por tanto, hay cuatro selecciones, que se anotan sistemáticamente como $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[a, c, d]$, $[b, c, d]$. De cada una de las selecciones se obtienen $3! = 6$ ordenaciones. Estas son

$$\begin{gathered}(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a),\\ (a,b,d),\ (a,d,b),\ (b,a,d),\ (b,d,a),\ (d,a,b),\ (d,b,a),\\ (a,c,d),\ (a,d,c),\ (c,a,d),\ (c,d,a),\ (d,a,c),\ (d,c,a),\\ (b,c,d),\ (b,d,c),\ (c,b,d),\ (c,d,b),\ (d,b,c),\ (d,c,b).\end{gathered}$$

Así se tiene el total de $4 \cdot 6 = 24 = O_{4,3}$ ordenaciones.

Se ha demostrado ahora que por cada selección de tres objetos de los cuatro se pueden obtener $3!$ agrupaciones. En el caso general, cada selección de r de los n objetos da $r!$ ordenaciones. Por consiguiente, el número total de ordenaciones de n objetos agrupando r a la vez es el producto por $r!$ del número de combinaciones de n objetos agrupando r a la vez. En la fórmula (25) se dio la definición de un cociente $C_{n,r}$ tal que $C_{n,r} \cdot r! = O_{n,r}$. Se deduce que $C_{n,r}$ es el *número de combinaciones de* n *objetos agrupando* r *a la vez*. Se aplicarán estos resultados en los siguientes ejercicios.

Ejemplos ilustrativos

I. ¿Cuántos números de cuatro dígitos diferentes pueden formarse de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Nota: **Este problema pide que se calcule el número de ordenaciones de dígitos.**

$$\textit{Resp.:}\ O_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024.$$

II. De un pelotón de 15 soldados hay que elegir un grupo de 5. ¿De cuántas maneras puede elegirse este grupo?

Nota: **La cuenta es solamente de selección y el problema es de combinaciones.**

$$\textit{Resp.:}\ C_{15,5} = \frac{\cancel{15}\cdot\overset{7}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot\overset{3}{\cancel{12}}\cdot 11}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 1\,001.$$

III. Un polígono regular tiene 23 vértices y, por consiguiente, 23 lados. ¿Cuántas rectas adicionales han de trazarse para que cada par de vértices esté unido por una recta?

Nota: Este problema también es de selección. Luego es un problema de combinaciones. También ilustra lo que puede llamarse *principio de exclusión*. En vez de contar lo que se pregunta en el problema, se cuentan *todas* las rectas que unen pares de puntos o vértices, y después de esto se resta del conjunto de ellas el número de lados del polígono.

$$Resp.: C_{23,2} - 23 = \frac{23 \cdot 22}{2} - 23 = 23(11 - 1) = 230.$$

IV. ¿Cuántos números impares, de cuatro cifras distintas cada uno, pueden formarse empleando los números 3, 4, 5, 6, 7 y 9 como dígitos?

Nota: El problema envuelve orden y es de ordenaciones. Se dan dos soluciones, una de las cuales usa el principio de exclusión.

Solución 1

Con los seis dígitos es posible formar $O_{6,4}$ números de cuatro dígitos. De éstos, $O_{5,3}$ terminan en 4 e igual cantidad en 6. Estos deben omitirse. Luego la respuesta es:

$$O_{6,4} - 2\,O_{5,3} = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) - (2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)$$
$$= (6 - 2)(5 \cdot 4 \cdot 3) = 240.$$

Solución 2

El dígito final puede ser uno cualquiera de los cuatro números. Después de haberlo elegido, los tres dígitos restantes se eligen y ordenan de los cinco dígitos que quedan. Esto se puede hacer de $O_{5,3}$ maneras. Por el principio fundamental, la respuesta es $4 \cdot O_{5,3} = 240$.

V. ¿Cuántas palabras de cinco letras distintas pueden hacerse con las letras del alfabeto inglés si a lo menos dos de las letras son vocales?

Nota: Las letras *a, e, i, o, u, y* se considerarán vocales. Obsérvese que este problema puede considerarse como realmente una colección de problemas, pues se puede resolver hallando el número de palabras con dos, tres, cuatro y cinco vocales. Se dará la solución más sencilla usando el principio de exclusión

Solución

El número total de palabras de cinco letras cada una es $O_{26,5}$. De éstas, $O_{20,5}$ no contienen vocales. Hay seis vocales y cinco lugares para poner cada vocal, y $O_{20,4}$ elecciones de consonantes en palabras con exactamente una vocal. Así hay $30\,O_{20,4}$ de estas palabras. La respuesta es:

$$\begin{aligned} O_{26,5} - O_{20,5} - 30\,O_{20,4} &= (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22) \\ &\quad - (20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16) - (30 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17) \\ &= (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22) - (46 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17) = 1\,443\,720. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Cuántas ordenaciones pueden hacerse con las letras de las palabras

(*a*) hipérbola	(*d*) fórmula
(*b*) compuertas	(*e*) problema
(*c*) número	(*f*) pila

2. De cuántas maneras se pueden ordenar los libros en un anaquel si en éste hay

(*a*) 12 libros	(*c*) 11 libros
(*b*) 20 libros	(*d*) 15 libros

3. Una designación de placas para licencia debe ser un número de seis dígitos distintos, sin que figure la cifra cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden formarse?

4. ¿Cuántas placas diferentes pueden formarse si la designación ha de constar de dos letras distintas seguidas por un número de tres dígitos distintos que no sean ceros? *Resp.:* 327 600.

5. ¿Cuántas placas pueden formarse si la designación ha de constar de tres letras distintas seguidas por: (*a*) un número formado de tres cifras arbitrarias y distintas; (*b*) un número de dos cifras distintas que no sean ceros?

6. Resolver los ejercicios 3, 4 y 5*b* en el caso en que el cero pueda ser uno de los dígitos.

Resp.: (3) 151 200; (4) 468 000; (5*b*) 1 404 000.

7. Resolver los ejercicios 3, 4 y 5 en el caso en que el cero pueda ser uno de los dígitos, pero no el primero.

8. ¿Cuántas palabras de seis letras distintas pueden formarse en las que las letras primera, tercera y quinta sean consonantes y las restantes vocales? *Resp.:* 820 800.

9. ¿Cuántas palabras de siete letras pueden formarse si las letras segunda, cuarta y sexta son vocales y las restantes consonantes?

10. ¿Cuántos números que consten de cinco dígitos impares seguidos de uno o de dos dígitos pares pueden formarse tales que ninguno de ellos tenga cifras repetidas? *Resp.:* 3 000.

11. ¿Cuántos pares diferentes de jugadores de tenis pueden elegirse de un grupo de 11 jugadores? ¿Y de un grupo de 8 jugadores?

12. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un contingente de 5 barcos de guerra de una flota de 20? *Resp.:* 15 504.

13. ¿De cuántas maneras puede una clase de 30 estudiantes elegir un comité de 4 estudiantes? ¿Y uno de seis estudiantes? ¿Y uno de 12 estudiantes?

14. Una baraja de juego de naipes ordinario se compone de cuatro palos, que son: espadas, corazones, diamantes y tréboles y cada palo consta de las cartas llamadas as, rey, dama, sota, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Dos cartas que llevan igual número se dice que son del mismo valor. (Cuando las respuestas a los problemas que siguen sean largas, dense en términos de los símbolos apropiados $O_{n,r}$ y $C_{n,r}$)

(a) En un solitario se ponen destapadas siete pilas de cartas con cinco cartas cada una. ¿Cuántos arreglos distintos son posibles?

(b) Una mano de un juego de naipes consta de cuatro cartas para cada uno de dos contrincantes y de cuatro cartas destapadas sobre la mesa. ¿Cuántas aperturas posibles hay?

Resp.: $C_{52,4} \cdot C_{48,4} \cdot C_{44,4}$.

(c) Una mano de un juego de naipes *(gin-rummy)* consta de 11 cartas para el contrincante del tallador y de 10 para este último. ¿Cuántas aperturas son posibles?

(d) Una mano de póquer consta de cinco cartas. ¿Cuántas manos diferentes de póquer hay?

(e) Una mano de póquer contiene un par si contiene dos cartas del mismo valor. ¿Cuántas manos hay que a lo menos tengan un par?

Resp.: $C_{52,5} - 4^5 C_{13,5} = 1\,281\,072$.

(f) Un flux o color es una mano de póquer que consta de cartas del mismo palo. ¿Cuántos fluxes diferentes pueden formarse? (Los fluxes que se diferencian sólo en el palo deben considerarse como diferentes.)

(g) Un ful es una mano de póquer que consta de un conjunto de tres cartas del mismo valor y un par de otro valor. ¿Cuántos fules diferentes hay (si se cuentan también como fules distintos cuando constan de palos distintos)? *Resp.:* 3 744.

(h) Una distribución de cartas de bridge consta de cuatro manos de 13 cartas cada una. El orden de las cartas en cada mano no tiene importancia, pero el orden de las manos es importante. ¿Cuántas distribuciones diferentes son posibles?

(i) ¿Cuántas distribuciones de bridge hay en las que por lo menos una mano consta de todas las trece cartas de un mismo palo? *Resp.:* $16 \cdot C_{39,13} \cdot C_{26,13}$.

(j) ¿Cuántas distribuciones de bridge hay en las que la mano del repartidor contiene todos los ases, reyes y damas?

15. Un grupo de libros consta de cinco textos de matemáticas, siete de física y tres de química. Una selección de nueve textos que contiene a lo menos un texto de química y tres de matemáticas debe colocarse en un anaquel. ¿Cuántas ordenaciones diferentes de los textos en este anaquel son posibles? *Resp.:* (3 360) (9!).

16. ¿Cuántas palabras de seis letras distintas pueden formarse si a lo menos dos y a lo más cuatro de las letras han de ser vocales?

17. ¿Cuántos números de siete dígitos distintos pueden formarse si el primer dígito y a lo menos tres de los otros dígitos han de ser impares? *Resp.:* 180 000.

18. Una señal de banderas consta a lo menos de dos banderas. El color, pero no el orden de las banderas, es lo que se tiene en cuenta para las señales. ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse disponiendo de siete banderas de diferentes colores?

19. Dos puntos determinan una recta. ¿Cuántas rectas pueden trazarse por n puntos que tengan la propiedad de que no haya tres de ellos en una misma recta? *Resp.:* $C_{n,2}$.

20. Tres puntos determinan un plano. ¿Cuántos planos pueden pasar por 11 puntos que tengan la propiedad de que no haya cuatro de éstos que sean coplanares?

21. Un polígono regular tiene 17 vértices unidos por rectas. ¿Cuántas rectas adicionales deben trazarse para que cada dos vértices estén unidos? *Resp.:* 119.

22. Cierta persona tiene ocho monedas diferentes. ¿De cuántas maneras puede hacer un pago consistente en no menos de dos ni más de seis de dichas monedas, sin tener en cuenta el importe de lo pagado?

23. Un conjunto de ejercicios consta de tres grupos, cada uno de los cuales tiene siete ejercicios. Hay que hacer un señalamiento que conste de seis ejercicios con, a lo menos, un ejercicio de cada uno de los dos grupos primeros y, a lo menos, dos del grupo final. ¿Cuántos señalamientos diferentes son posibles? *Resp.:* 31 556.

16. Permutaciones cíclicas y circulares (CURSO COMPLETO). Hasta ahora se ha ido contando el número de arreglos *lineales* (es decir, en una línea o sucesión) de las letras. Se va a estudiar ahora el número de arreglos *en un círculo* considerando que sólo la posición *relativa* de los elementos es importante.

La ordenación $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1$ de los términos de una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se dice que se obtiene de la sucesión original (la última) mediante una permutación *cíclica*. Una permutación cíclica de la sucesión primera resultará en $a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2$, y después de tales n pasos se volverá al orden original. Así se pueden derivar n permutaciones cíclicas a partir de cualquier permutación dada de n objetos.

Dispónganse ahora los n objetos de una permutación como n puntos igualmente espaciados en un círculo. Entonces las n permutaciones cíclicas de este arreglo no serán distinguibles y así darán la misma permutación *circular*. Evidentemente cualesquiera m permutaciones circulares distintas dan nm permutaciones *lineales* distintas. Se deduce inmediatamente que el número de permutaciones circulares distintas de n objetos es

$$\frac{P_n}{n} = (n-1)!. \tag{26}$$

También es claro que cada ordenación circular de n objetos tomados de r en r da r ordenaciones lineales, cada una obtenida por permutación cíclica de cualquiera de ellas. Por tanto, el número de ordenaciones circulares de n objetos tomados de r en r es

$$\frac{O_{n,r}}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r} = \frac{n!}{r[(n-r)]!}.$$

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas maneras pueden sentarse nueve personas alrededor de una mesa redonda?

2. ¿De cuántas maneras se pueden disponer cinco llaves en un llavero circular si las llaves deben elegirse de un grupo de siete?
Resp.: 504.

3. Un grupo de cuatro mujeres debe sentarse alrededor de una mesa y un grupo de seis hombres, alrededor de otra. ¿Cuántos arreglos son posibles?

4. Un grupo de seis mujeres y seis hombres han de sentarse alrededor de una mesa redonda de manera que hombres y mujeres se sienten alternativamente. ¿Cuántos arreglos son posibles?
Resp.: 86 400.

5. ¿Cuántas ordenaciones circulares hay de cuatro letras tomando una, dos, tres y cuatro letras en un tiempo?

6. ¿Cuántas ordenaciones circulares hay de siete letras tomándose cinco o seis letras en un tiempo? *Resp.:* 1 344.

7. Una rueda de juego ha de constar de tres anillos relativamente fijos, cada uno de ellos con siete secciones de color diferente. ¿Cuántos arreglos diferentes de colores son posibles?

17. Permutaciones distinguibles (CURSO COMPLETO). El estudio de las permutaciones distinguibles se empieza mejor prestando atención a r objetos de una sucesión de n objetos. Cuéntese el número de permutaciones si se permutan solamente estos r objetos dejando a los demás fijos. Ya que los objetos fijos no se toman en consideración, es como si no aparecieran, y por lo tanto hay $r!$ permutaciones. Se sigue que las $n!$ permutaciones de n objetos, n en un tiempo, pueden subdividirse en

$$(28) \qquad \frac{n!}{r!} = n(n-1)\ldots(r+1)$$

grupos de permutaciones. Estos *grupos* son tales que cada permutación de un grupo se puede obtener de cualquier otra del mismo grupo permutando el mismo conjunto de los r objetos prescritos; dos permutaciones en grupos distintos no pueden obtenerse una de la otra sin permutar algunos de los $n - r$ objetos restantes.

Supóngase ahora que los r objetos fijos son iguales. Entonces todas las permutaciones de cada uno de los grupos arriba descritos son también iguales y deben ser consideradas como una sola permutación. Se sigue, por lo tanto, que el número de permutaciones de n objetos (n en un tiempo), de los cuales r son iguales, es $n(n-1)\ldots(r+1)$.

Préstese ahora atención a s de los $n - r$ objetos restantes. Si se permutan estos s objetos y los r objetos originales, se obtiene un grupo de $r!s!$ permutaciones de cada permutación de n objetos. Se sigue que habrá

$$\frac{n!}{r!s!} \tag{29}$$

grupos. Por consiguiente, el *número de permutaciones distinguibles* de n objetos, r de los cuales son iguales entre sí, y s de los restantes iguales entre sí (pero distintos de los anteriores), es igual al *cociente* de la fórmula (29).

En el caso particular en que $s = n - r$, el valor de la fórmula (29) es $C_{n,r}$ y queda demostrado que el número de permutaciones distinguibles de $n = r + s$ objetos de los cuales r son iguales y los restantes s son también iguales entre sí (y distintos de los anteriores) es igual a $C_{n,r} = C_{n,s}$.

Supóngase finalmente que se tenga

$$n = n_1 + \ldots + n_t \tag{30}$$

suma de números enteros positivos. Entonces se pueden agrupar las permutaciones de n objetos en

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!} \tag{31}$$

colecciones de permutaciones y, si los objetos de cada colección de n_i objetos son iguales entre sí, la fórmula (31) da el número de permutaciones distinguibles. Esta fórmula es de mucha importancia, pues muestra que *si se expresa* n *como una suma* (30), *entonces el número* n! *será divisible por* $n_1!n_2!\ldots n_t!$.

Obsérvese, para terminar, que no hay ninguna fórmula para el número de ordenaciones distinguibles de n objetos tomados de r en r cuando algunos de ellos son iguales.

Ejemplos ilustrativos

I. Compruébese que 8! es divisible por 4!2!2!, así como por 2!2!2!2! y 5!3!. ¿Por qué es automáticamente cierto que 8! es divisible por 3!2!2!1!1!?

Solución

$$\frac{8!}{4!2!2!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2}=2\cdot 7\cdot 6\cdot 5=420,$$

$$\frac{8!}{2!2\cdot 2\cdot 2}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 2}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2\,520,$$

$$\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=56.$$

Ya que $a=3!2!2!1!1!$ es un factor de $b=4!2!2!$ y b divide a 8!, entonces también a divide a 8!

II. ¿Cuántas permutaciones distinguibles de un grupo de cinco bolas pueden formarse con una colección de 5 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas?

Solución

$$\frac{10!}{5!3!2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 2}=10\cdot 9\cdot 4\cdot 7=2\,520.$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuántas permutaciones distinguibles pueden hacerse con las letras de las siguientes palabras:

(*a*) Illinois
(*b*) Massachusetts
(*c*) Tennessee
(*d*) Mississippi
(*e*) Indiana
(*f*) California
(*g*) diminutivo
(*h*) distinguible
(*i*) arreglable
(*j*) syzygy
(*k*) discriminante
(*l*) matemáticas

2. Compruébese con cálculo directo que los cocientes siguientes son enteros:

(*a*) $\dfrac{9!}{7!2!}$ (*d*) $\dfrac{27!}{9!4!14!}$

(*b*) $\dfrac{11!}{3!3!4!}$ (*e*) $\dfrac{27!}{8!8!8!3!}$

(*c*) $\dfrac{11!}{5!4!2!}$ (*f*) $\dfrac{130!}{10!10!10!}$

3. Un grupo de once libros rojos, seis verdes, cinco amarillos y uno negro deben ser colocados en fila. ¿Cuántas permutaciones distinguibles pueden formarse?

Resp.: $23 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3$.

CAPITULO II

NUMEROS ENTEROS

1. El dominio de los números enteros. La sucesión de los números naturales puede extenderse agregando los símbolos $-n$ para cada entero positivo n. Defínase, además, $-0 = 0$ y se obtendrá la sucesión de símbolos

$$(1) \quad \ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

que se prolonga indefinidamente en ambas direcciones y que contiene a $-n$ para cada número natural n.

A los nuevos símbolos $-1, -2 \ldots$ se les llamará números *enteros negativos* y se considerarán *todos* los símbolos de la sucesión (1) como números *enteros*. Entonces se indicará que un entero a es positivo escribiendo $a > 0$, que a es un número natural escribiendo $a \geqq 0$, y que a es un entero negativo escribiendo $a < 0$.

En el artículo siguiente se dan las definiciones formales de suma y multiplicación de números enteros, siendo el resultado un sistema numérico: el dominio de los enteros.

2. Adición y multiplicación. El conjunto de enteros contiene al conjunto de los números naturales. Se extenderán las definiciones de suma y producto de estos enteros que se dieron en el capítulo I.

Supóngase ahora que $a < 0$ y $b < 0$ de tal manera que $a = -c$ y $b = -d$ donde $c > 0$ y $d > 0$. Entonces se define $ab = (-c)(-d)$ como cd. Si $a \geqq 0$ y $b < 0$, se escribe $b = -d$ y se define $ab = a(-d)$ como $-ad$. Finalmente, si $a < 0$ y $b \geqq 0$, ya se ha definido ba. Defínese $ab = ba$.

Se define la suma $a + b = (-c) + (-d)$ de dos enteros negativos cualesquiera a y b como $-(c + d)$.

Si $a \geqq 0$ y $b < 0$, se escribe $b = -d$ con $d > 0$ y se define $a + b = a + (-d)$ como $a - d$, en el caso $a \geqq d$ y $a + b$ como $-(d - a)$ en el caso $d > a$. El único caso que falta es el de $a < 0$ y $b \geqq 0$. En este caso, $b + a$ ya se ha definido y se define entonces $a + b$ como $b + a$.

Como en el caso de los números naturales, se dice que un entero c es mayor que a si $c = a + b$ siendo b un entero positivo. Entonces c estará a la derecha de a en la sucesión (1).

El principio 3 del artículo 6 (CURSO COMPLETO) del capítulo I puede ahora generalizarse.

Principio 4. *Todo conjunto de enteros tal que todos sus elementos sean mayores que un entero fijo,* a, *contiene un entero mínimo.*

Principio 5. *Todo conjunto de enteros tal que todos sus elementos sean menores que cierto entero fijo,* a, *contiene un entero máximo.*

No se tratará ahora de demostrar cómo estos dos principios se derivan del mismo artículo 6 del capítulo I.

3. La ley de la sustracción. Puede demostrarse que las nueve leyes de la adición y multiplicación son propiedades válidas en el dominio de todos los enteros. Una propiedad adicional es la dada en la:

X. LEY DE LA SUSTRACCIÓN. *Si* a *y* c *son enteros arbitrarios, existe un único número,* b, *que llamaremos la* diferencia *entre* c *y* a *y que denotaremos por*

$$b = c - a$$

tal que $c = a + b$.

La definición de adición implica que si n es un número natural arbitrario, entonces la suma $n + (-n) = 0$. Si $a < 0$

y se escribe $a = -n$, se tiene $a + n = 0$. Al número g tal que $a + g = 0$ se le puede llamar el *negativo* de a y se tiene $-(-n) = n$. Entonces puede comprobarse que en todos los casos

$$(2) \qquad -(-a) = a, \qquad c - a = c + (-a).$$

También se enuncian aquí, aunque sin demostrarlas, las propiedades

$$\begin{aligned}
&a(-b) = (-a)b = -(ab), \qquad (-a)(-b) = ab,\\
&-(a + b) = (-1)(a + b) = -a - b = (-a) + (-b),\\
&-(a - b) = b - a, \qquad -(-a - b) = a + b,\\
&-(-a + b) = a - b, \qquad (-a)^{2n} = a^{2n},\\
(3)\qquad &\qquad\qquad (-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1}),
\end{aligned}$$

para todos los enteros a y b y todo entero positivo n.

Los procesos de adición, sustracción y multiplicación se llamarán desde ahora en adelante *operaciones enteras*. Todos los símbolos usados en este texto y combinados mediante operaciones enteras se supondrá que satisfacen las diez leyes anteriormente mencionadas, las cuales también obedecerán las leyes para exponentes enteros no negativos del artículo 9 del capítulo I, así como las fórmulas (2) y (3).

EJERCICIOS ORALES

1. Calcular: $(-1)^5$, $(-1)^6$, $(-2)^3$, $(-2)^4$.

2. Simplificar las expresiones siguientes:

(*a*) $-2(x - 2y)$
(*b*) $5x - [-2(y - 2x)]$
(*c*) $(-x + 1)(x + 1) + (-x)x(-2)$
(*d*) $1 - (-2)(5 - 3) - 3$
(*e*) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$
(*f*) $1 - (1 + 1) - (1 + 1) - 1$

EJERCICIOS

1. Usar el método de los *ejercicios orales* para simplificar las siguientes expresiones:

(a) $-\{-[7(4-6+1)]-[(5+2)(-3+1)$
$+ (3+2)(-3-1)(-2)+(-3)(-4+8)]\}$

(b) $2[x-(3x-y)]+3[-2(x+3y)+4(x-y)$
$+(-2)(2x-3y)]$

(c) $[3x-(x+2y)2-(2y+x)+(-2)(-3y)][x(y+2x)$
$+xy(1-2)-x^2]$

(d) $(x+y)^2-(x-y)^2-(2x)(2y)$

(e) $-2[x(x^2-3x)+(x+1)(x-1)]+3x[(x+1)$
$(x-2)+1]$

(f) $(x+y)(-1+x)[x+x^2-(xy+y)]-x^2(x^2-y^2)$

2. Escribir las expresiones algebraicas siguientes en forma de diferencia entre el primer término y la expresión entre paréntesis que incluye los términos restantes.

(a) $x^3-y^3-2x+3y$
(b) $-a+2b+3c-d$
(c) $2x-2(y+z)+x^2$
(d) $4x^2-x-y+2xy$
(e) $x+2(y-z)$
(f) $2x-(-y-z)-x^2$

4. Valores absolutos. El *valor absoluto* de un número natural a se define como el mismo a. Si $a < 0$ se define su valor absoluto como el entero positivo a. Entonces, el valor absoluto de a, designado con

$$|a|$$

es un entero positivo excepto en el caso $a = 0$, y en este caso $|0| = 0$. Enunciaremos, sin demostrar, las propiedades

$$(4) \qquad |ab| = |a|\,|b|, \qquad |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Además, si $c = |a| - |b|$, se tiene

$$(5) \qquad |c| \leqq |a-b|.$$

EJERCICIOS ORALES

1. Hallar x si

(a) $x = (-1)(-1)(-2)(-3)$
(b) $x = (-1)(-1)(-3)(-4)$
(c) $x = 3-(4+6)$
(d) $x = (-3)^2$

2. Calcular $|a + b|$, $|a| + |b|$ en los siguientes casos:

(a) $a = 7, b = 3$
(b) $a = 7, b = -3$
(c) $a = -7, b = 3$
(d) $a = -7, b = -3$
(e) $a = b = 7$
(f) $a = b = -7$
(g) $a = 7 = -b$
(h) $a = -7 = -b$

5. Divisibilidad. Como en el caso de los números naturales, se dice que un entero a es *divisible* por un entero b si $a = bq$, donde q es un *entero*. Entonces, si $b \neq 0$, el cociente

$$q = \frac{a}{b}$$

es un entero único. En este caso se dice que b es un *factor* o *divisor* de a.

Si $a = bq$, entonces $a = (-b)(-q)$. Por consiguiente, si b es un factor de a, también lo es $-b$. Se deduce que en toda factorización de a como un producto de enteros hay otras factorizaciones asociadas en las cuales se incluye un número par de signos menos. También toda factorización $a = bq$ de a da una factorización $-a = b(-q)$ de $-a$. Por lo tanto, para dar una teoría completa de las factorizaciones de todos los enteros es suficiente dar tal teoría para *enteros positivos* como productos de *factores positivos*.

Todo entero positivo a tiene la *factorización trivial* $a = a \cdot 1$, y a los factores a y 1 se les llama los *factores triviales* de a. Un entero $p > 1$ se llama *primo* si no tiene factores no triviales. Un entero $a > 1$ se llama *compuesto* si no es un *primo*. Se demostrará ahora el siguiente:

Lema 1. *Todo factor no trivial* b > 0 *de un entero positivo* a *es menor que* a.

Porque si $a = bq$ donde $b \neq a$ y $b \neq 1$ se tiene $q \neq 1$ y $q = 1 + d$ donde $d > 0$. Entonces $a = b(1 + d) = b + bd$ donde $bd > 0$, y $a > b$.

Como un corolario inmediato del Lema 1 se tiene los dos lemas siguientes:

Lema 2. *Sea* $b > a \geqq 0$. *Entonces* b *divide a* a *si y sólo si* $a = 0$.

Lema 3. *Los únicos divisores de* 1 *son* 1 *y* -1.

6. El algoritmo de la división (CURSO COMPLETO). El proceso de la división de la aritmética elemental puede extenderse a todos los enteros. Se enuncia este resultado en la siguiente forma:

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA LOS ENTEROS. *Sean* a *y* b *dos enteros y* $b \neq 0$. *Entonces existen dos enteros únicos* a *y* r *con* $0 \leqq r < |b|$ *tales que*

(6) $$a = qb + r.$$

Para probar este resultado considérese el conjunto de todos aquellos enteros múltiplos de $h = |b|$ que sean mayores que a. Por el principio 4 del artículo 2 hay entre ellos un múltiplo *mínimo*. Llámese $(t+1)h$ a tal múltiplo. Esto define t y, ya que $th < (t+1)h$, se tiene $th \leqq a < (t+1)h$. Entonces $0 \leqq a - th < h$. Haciendo $r = a - th$ se tiene $a = th + r = qb + r$. Aquí $q = t$ si $b = |b|$, $q = -t$ si $b = -|b|$.

Para probar que q y r son únicos, supóngase que hay otra pareja de enteros tales que $a = ub + v$. Escójase la notación de tal manera que $v \geqq r$. Entonces $h > v \geqq r$, $h - r > v - r \geqq 0$, $h \geqq h - r > v - r \geqq 0$. Por el lema 2, h puede dividir a $v - r$ solamente cuando $v - r = 0$, es decir, $v = r$. Ya que $ub + v = a = qb + r$, se tiene $v - r = qb - ub = (q - u)b$, $|b|$ divide a $v - r$, $v = r$. También $(q - u)b = 0$ para $b \neq 0$ y $q = u$.

Ejemplos ilustrativos

Calcular q y r si $a = -249$, $b = 17$.

Solución

Por el proceso usual de la división, $249 = (14)(17) + 11$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} -249 = (-14)(17) - 11 &= (-14)(17) - 11 + 17 - 17 \\ &= (-15)(17) + 6, \quad q = -15, \ r = 6. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcúlense q y r para los enteros siguientes:

(a) $a = -180,\ b = 9$	*(f)* $a = 11\,692,\ b = -245$
(b) $a = -169,\ b = 11$	*(g)* $a = -6\,942,\ b = -111$
(c) $a = -982,\ b = 21$	*(h)* $a = -6\,721,\ b = -100$
(d) $a = 279,\ b = -11$	*(i)* $a = -4\,127,\ b = -121$
(e) $a = 247,\ b = -27$	*(j)* $a = -17\,115,\ b = -489$

7. El procedimiento de Euclides del máximo común divisor (CURSO COMPLETO). Si a y b son enteros y c es un entero que divide a a y b, se dice que c es un *divisor común* de a y b. Si $a = b = 0$, *cualquier* entero es un divisor común de a y b. En los demás casos hay un divisor común mayor d de a y b, que se llama su *máximo común divisor* (abreviado, m.c.d.). A veces se hace referencia a él como al *máximo común factor* (abreviado m.c.f.). Primero se demostrará el siguiente:

Lema 4. *Supóngase que* $b \neq 0$ *y que divide a* a. *Entonces el* m.c.d., *de* a *y* b *es* $|b|$.

Esto se sigue de que el máximo divisor de b es $|b|$ y de que $|b|$ divida a a.

Se demuestra a continuación el:

Lema 5. *Supóngase que* $b \neq 0$ *y que* $a = qb + r$. *Entonces los factores comunes de* a *y* b *coinciden con los factores comunes de* b *y* r; a *y* b *tienen el mismo m.c.d. que* b *y* r.

Efectivamente, si c divide a a y b, se puede escribir $a = cf$, $b = cg$ y se tiene $a - qb = cf - qcg = c(f - qg) = r$, $f - qg$ es un entero, c divide a r. Inversamente, si c divide a b y r, se escribe $b = cg$, $r = ch$, y se tiene $a = qcg + ch = (qg + h)c$, o sea, c divide a a.

Los lemas 4 y 5 ofrecen un procedimiento para encontrar el m.c.d. de cualquier pareja a, b de enteros no nulos ambos. Supóngase que se han indicado estos enteros de tal manera que b no es cero. Entonces el lema 4 da su m.c.d. si b divide a a. En caso contrario $a = qb + r$ con $0 < r < |b|$, y si r divide a b, él es el m.c.d. de a y b. El proceso de determinar cuándo r divide o no a b es el de la división que nos da $b = q_1 r + r_1$ con $0 \leqq r_1 < r$. Si r no es el m.c.d. de a y b, se tiene $0 < r_1$ y el m.c.d. de a y b es el m.c.d. de r y r_1. Así queda descrito un procedimiento con divisiones para encontrar el m.c.d. mediante una sucesión decreciente de divisores positivos. Después de $|b|$ pasos a lo sumo, este proceso termina, y el último residuo distinto de cero será el m.c.d.

En el resto de este capítulo se usará la notación $\{a, b\}$ para el m.c.d. de a y b.

Ejemplos ilustrativos

Hallar el m.c.d. de 8 381 y 1 015.

Solución

Se dispone la operación en la forma siguiente:

	8	1	3	8
29	232	261	1015	8381
	232	232	783	8120
	0	29	232	261

Resp.: $\{8\,381, 1\,015\} = 29$.

II. Demostrar que $\{4\,233, 884\} = 17$.

Solución

Dividiendo se encuentra que $4\,233 = 249 \cdot 17$ y que $884 = 52 \cdot 17$. Entonces $\{4\,233, 884\} = 17$ si y sólo si $\{249, 52\} = 1$. Este resultado se obtiene de los cálculos

	2	1	2	1	3	1	4
1	2	3	8	11	41	52	249
	2	2	6	8	33	41	208
	0	1	2	3	8	11	41

Estos cálculos pueden abreviarse cuando se llega al residuo 11, cuyos únicos factores son 1 y 11.

EJERCICIOS

1. Hallar:

(a)	$\{191, 78\}$	
(b)	$\{198, 62\}$	*Resp.:* 2
(c)	$\{253, 29\}$	
(d)	$\{84, 276\}$	*Resp.:* 12
(e)	$\{92, 876\}$	
(f)	$\{147, 637\}$	*Resp.:* 49
(g)	$\{11\,682, 1\,072\}$	
(h)	$\{464, 2\,288\}$	*Resp.:* 16
(i)	$\{2\,904, 312\}$	
(j)	$\{528, 2\,343\}$	*Resp.:* 33.
(k)	$\{648, 2\,997\}$	
(l)	$\{894, 3\,278\}$	*Resp.:* 298.
(m)	$\{1\,442, 6\,489\}$	
(n)	$\{1\,432, 8\,469\}$	*Resp.:* 1.
(o)	$\{1\,134, 8\,019\}$	
(p)	$\{1\,608, 17\,523\}$	*Resp.:* 3.
(q)	$\{768, 9\,552\}$	
(r)	$\{266\,664, 877\,769\}$	*Resp.:* 11 111

2. Usar el método del ejemplo ilustrativo II para mostrar que

(a) $\{21\,924, 2\,144\} = 4$

(b) $\{179, 21\} = 1$

(c) $\{4\,078, 814\} = 2$

(d) $\{5\,103, 7\,614\} = 81$

(e) $\{4\,526, 9\,344\} = 146$

(f) $\{7\,992, 17\,640\} = 72$

8. Combinaciones lineales (CURSO COMPLETO). Si a, b, m, n son enteros, la suma

$$ma + nb$$

se llama una *combinación lineal* de a y b. Es también, desde luego, una combinación lineal de m y n. Se puede probar el

Lema 6. *Sean* f *y* g *combinaciones lineales de* a *y* b. *Entonces toda combinación lineal de* f *y* g *es una combinación lineal de* a *y* b.

Por la hipótesis, $f = ma + nb$, $g = sa + tb$. Entonces

$$hf + kg = h(ma + nb) + k(sa + tb) = hma + hnb + ksa + ktb = (hm + ks)a + (hn + kt)b.$$

Se probará ahora el

Teorema 1. *El m.c.d. de* a *y* b *es la mínima combinación lineal*

$$d = ma + nb \tag{7}$$

de a *y* b. *Todo divisor común de* a *y* b *divide a* d.

Se vio que si b divide a a, el número $|b| = \pm 1 \cdot b + 0 \cdot a = d$ es una combinación lineal. De otro modo, $a = qb + r$, $r = 1 \cdot a + (-q)b$ es una combinación lineal de a y b. Si $r \neq d$, se forma $b = q_1 r + r_1$, y r_1 es una combinación lineal de b y r. Pero r_1 es una combinación lineal de b y r, y, por consiguiente, de a y b, según el lema 6. Así, pues, el algoritmo de Euclides da una sucesión de residuos, cada uno de los cuales es combinación lineal de a y b. El último de los residuos diferente de cero es d. Por tanto, $d = ma + nb$. Si $w = sa + tb$ se ve que $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $w = (sa_1 + tb_1)d$ es divisible por d. Luego d es la menor combinación lineal positiva.

Dos enteros a y b se llaman *primos entre sí* si su único divisor positivo común es 1. Se dice entonces que "a es primo respecto a b" y "b es primo respecto a a". El m.c.d. de a y b es entonces 1, y por el teorema 1 existen entonces enteros m y n tales que

$$ma + nb = 1. \tag{8}$$

Inversamente, si $ma + nb = 1$, todo divisor común de a y b divide a 1, y a y b son primos entre sí.

Teorema 2. *Dos enteros* a *y* b *son primos entre sí, si y sólo si existen dos enteros* m *y* n *tales que* ma + nb = 1.

Si d es el m.c.d. de dos enteros a y b, se puede escribir $d = ma + nb$. Pero $a = gd$, $b = hd$ y $d = mgd + nhd = (mg + nh)d$, $mg + nh = 1$. Por tanto, se tiene el siguiente:

Teorema 3. *Sea* d *el m.c.d. de* a *y* b *y sea* a = dg, b = dh. *Entonces* g *y* h *son primos entre sí.*

Para hallar los enteros m y n de la fórmula (8) se necesita únicamente encontrar un entero m tal que $ma - 1$ sea divisible por b. El cociente será $-n$. Es solamente necesario probar los enteros $1, 2, \ldots, b-1$. Cuando a y b no son primos entre sí y se quiere encontrar m y n de tal manera que $ma + nb = d$, se usa el proceso descrito para $mg + nh = 1$.

El teorema 2 puede usarse para obtener el siguiente lema importante:

Lema 7. *Si* b *divide a* ac *y* a *y* b *son primos entre sí, entonces* b *divide a* c.

Se tiene $ma + nb = 1$. Multiplicando por c se obtiene

$$mac + nbc = c.$$

Ya que b divide a ac, se tiene $ac = bq$,

$$c = mbq + nbc = (mq + nc)b.$$

Por lo tanto, b es un factor de c.

El m.c.d. de un entero cualquiera a y un primo p divide a p y es, por lo tanto, 1 o $|p|$. Por consiguiente, p divide a a o p y a son primos entre sí. Por el lema 7, si p divide a ac y no divide a a, divide a c. Si p divide a abc y no divide a a entonces divide a bc y, por lo tanto, divide a b o divide a c. Este resultado puede extenderse a cualquie. número de factores y se enuncia como sigue:

Teorema 4. *Un primo* p *divide a un producto* ab *si y solamente si divide a uno al menos de los factores* a *y* b.

9. El teorema fundamental de la Aritmética (CURSO COMPLETO). El teorema más importante sobre los números enteros positivos puede enunciarse como sigue:

Teorema fundamental de la Aritmética. *Todo entero* $a > 1$ *puede expresarse como un producto* $p_1p_2\ldots p_t$ *de factores primos positivos* p_i. *Esta factorización es única excepto en el orden de los factores.*

Si a es ya primo, la notación significa que $t = 1$ y queda un solo factor, $a = p_1$. En cualquier factorización a pueden ordenarse los factores primos p_i de tal forma que

$$p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_t.$$

Supóngase ahora que se tiene una segunda factorización tal que $a = q_1q_2 \ldots q_s$ y que se han ordenado los factores primos en la forma

$$q_1 \leqq q_2 \leqq \ldots \leqq q_s .$$

Entonces, según el teorema fundamental, $t = s$ y $p_i = q_i$ para todo valor de i desde 1 hasta t.

Para probar este resultado, sea p_1 el factor de a positivo mínimo no trivial. Todo divisor de p_1 divide a a y, si no es trivial, es menor que p_1. Ya que p_1 es el menor de tales divisores, es primo. Entonces o bien $a = p_1$ y ya se tiene la factorización deseada, o bien $a = p_1a_1$ donde $a > a_1 > 1$. Se factoriza ahora el factor no trivial mínimo p_2 de a_1 y se tiene que $a = p_1p_2$ o bien $a = p_1p_2a_2$, donde $a_1 = p_2a_2$, $a_1 > a_2 > 1$. Este proceso se termina después de un número finito de pasos y conduce a la factorización o descomposición en factores deseada.

Supóngase ahora que se tienen dos factorizaciones como las anteriormente mencionadas. Según el teorema 4, el primo p_1 divide a $q_1 \ldots q_s$ solamente si divide a alguna q. Pero entonces p_1 es igual a esta q. Elíjase la notación de tal manera que $p_1 = q_1$.

Luego

$$a_1 = p_2 \ldots p_t = q_2 \ldots q_s$$

Con el mismo argumento se obtiene $p_2 = q_2$. Después de un número finito de pasos análogos se terminará con el entero 1 en un miembro de la igualdad y con un producto de primos en el otro miembro, a menos que $t = s$. Con esto queda demostrado el teorema.

10. El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios enteros (CURSO COMPLETO). El máximo común divisor de n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se define como el mayor entero positivo que es divisor de todos ellos. Es posible dar una demostración inductiva del siguiente resultado:

Teorema 5. *Sea* $a_1, a_2 \ldots, a_n$ *una sucesión de* n *enteros positivos y desígnese con* d_k *el m.c.d. de* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Entonces*

$$d_{k+1} = \{d_k, a_{k+1}\} \qquad (k = 2 \ldots n - 1),$$

y todo divisor común de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *es divisor de* d_n.

Se hará la demostración observando que los divisores comunes de d_k y a_{k+1} son divisores comunes de $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, y los divisores comunes de $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ lo son de d_k y a_{k+1}. Entonces d_k y a_{k+1} tienen el mismo m.c.d. No se entrará en más detalles acerca de la formulación rigurosa de la demostración inductiva.

El *mínimo común múltiplo* (abreviado *m.c.m.) de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es el entero positivo menor divisible por toda a_i. Se demostrará:

Teorema 6. *El* m.c.m. *de* a *y* b *es el cociente de dividir su producto* ab *entre su máximo común divisor* d, *o sea,*

$$\frac{ab}{d}.$$

En efecto, sean $a = gd$, $b = hd$ donde g y h son primos entre sí. Si m es el m.c.m. de a y b, se puede escribir $m = sa = tb$, $sgd = thd$, $sg = th$. Por consiguiente, h es un factor de sg y es primo respecto a g; h divide a s. Ya que $m = sa$, se ve que $ha = ghd$ es un factor de m. Pero ghd es divisible por $a = gd$ y $b = hd$, de donde m debe ser igual a ghd. Este producto es el cociente de la fórmula (9).

Como en el caso del m.c.d., se tiene un resultado para el m.c.m., que se enunciará sin demostración.

Teorema 7. *Denótese con* m_k *el m.c.m. de* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Entonces* m_{k+1} *es igual al m.c.m. de* a_{k+1} *y* m_k.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar el m.c.d. de 8 381, 1 015, 87.

Solución

Según un ejemplo ilustrativo anterior $\{8\,381,\ 1\,015\} = 29$. Ya que 29 divide a 87, la respuesta es 29.

II. Hallar el m.c.m. de 528, 792, 132.

Solución

Según el proceso se encuentra que $\{528,\ 792\} = 264$ y que $528 = 264 \cdot 2$, $792 = 264 \cdot 3$. Por consiguiente, el m.c.m. de 528 y 792 es $264 \cdot 3 \cdot 2 = 1\,584$. También 132 es un divisor de 264. La respuesta es 1 584.

EJERCICIOS

1. Hallar el m.c.d. de cada uno de los conjuntos siguientes de números enteros:

(*a*) 102, 174, 112
(*b*) 378, 462, 399
(*c*) 1 296, 1 584, 936, 1 558
(*d*) 968, 2 057, 1 276, 348
(*e*) 460, 644, 1 012, 598
(*f*) 4 329, 8 991, 2 553, 2 109

2. Hallar el m.c.m. de cada uno de los grupos siguientes de números enteros:

(*a*) 2, 6, 8, 10
(*b*) 3, 81, 15
(*c*) 87, 58, 174
(*d*) 108, 90, 135, 315
(*e*) 81, 54, 135, 225

11. Los factores de un entero. Si p es un factor primo positivo de un entero $a \neq 0$ y e es el mayor entero positivo tal que p^e divide a a, se dirá que a es *divisible exactamente* por p^e. Entonces en la factorización de a como más o menos un producto de primos positivos, exactamente e de los factores primos serán iguales a p.

Se pueden agrupar los factores primos de un entero a de tal manera que $\pm a$ se escriba como un producto de potencias de primos distintos. Entonces el teorema fundamental de la aritmética dice que estos primos y sus exponentes son únicos.

El procedimiento de factorizar o descomponer en sus factores primos un entero se ilustra en los ejemplos siguientes. Se da también un método sistemático de escribir los divisores, el cual será útil en el capítulo VI.

Ejemplos ilustrativos

I. Demostrar que si $n > 1$ y $b \neq 0$ son enteros y p es primo, no existe ningún entero a tal que $a^n = pb^n$.

Solución

Supóngase que existe tal entero a. Entonces $pb^n \neq 0$ y a no puede ser cero. Sean a divisible exactamente por p^e y b por p^f. Entonces a^n será divisible exactamente por p^{en}, b^n lo será por p^{fn} y pb^n por p^{fn+1}. Como que $pb^n = a^n$ se tiene $en = fn + 1$, $en - fn = (e - f)n = 1$. Esto es imposible ya que $n > 1$ no puede ser un factor de 1.

II. Factorizar el entero 80 784.

Solución

Se escriben los primos positivos menores que 50, los cuales se usarán en los ejercicios siguientes. Estos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Probando 2, 4, 8, 16, 3, 9, 27 sucesivamente, se encuentra que

$$\begin{aligned} 80\,784 = 4(20\,196) = 2^4(5\,049) &= 2^4 \cdot 9(561) \\ &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 187 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 17. \end{aligned}$$

III. Sea $a = p^3q^2r$ donde p, q y r son primos distintos. ¿Cuáles son los divisores positivos de a?

Solución

Los divisores de a son 1, p, p^2, p^3, q, pq, p^2q, p^3q, q^2, pq^2, p^2q^2, p^3q^2, r, pr, p^2r, p^3r, qr, pqr, p^2qr, p^3qr, q^2r, pq^2r, p^2q^2r, p^3q^2r. Hay $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ divisores.

IV. Escribir los divisores positivos de 1 800.

Solución

$1\,800 = 2^3 3^2 5^2$. Los 36 divisores son: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 25, 50, 100, 200, 75, 150, 300, 600, 225, 450, 900, 1 800. Volviendo a escribirlos en orden creciente, se tiene, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 36, 40, 45, 50, 60, 72, 75, 90, 100, 120, 150, 180, 200, 225, 300, 360, 450, 600, 900, 1 800.

EJERCICIOS

1. Factorizar o descomponer en factores primos los números enteros siguientes:

(a)	504	*(e)*	5 712	*(i)*	8 281
(b)	2 310	*(f)*	31 603	*(j)*	65 875
(c)	1 078	*(g)*	1 271	*(k)*	1 120 581
(d)	32 175	*(h)*	22 607	*(l)*	15 750

2. Escribir todos los divisores enteros positivos de los números siguientes:

(a)	504	*(d)*	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$	*(g)*	1 944	*(j)*	420
(b)	5 712	*(e)*	1 084	*(h)*	936	*(k)*	486
(c)	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$	*(f)*	512	*(i)*	588	*(l)*	384

CAPITULO III

NUMEROS RACIONALES, REALES Y COMPLEJOS

1. La recta real. La idea intuitiva de número real positivo es la de *magnitud,* es decir, de un tamaño o una medición de longitud. Básicamente esta idea es la de considerar a los números reales positivos como correspondiendo, en forma biunívoca, a los puntos de un rayo (semieje) como en la figura 1. El punto marcado con O se llama el *origen* del sistema de medida, es decir, el punto desde el cual se mide. El punto marcado con 1 es el punto unitario y la distancia desde O a 1

FIG. 1

es la unidad de longitud. El semieje es infinito hacia la derecha y cada uno de sus puntos determina la longitud desde el origen a dicho punto. El número a de unidades de longitud es entonces un número real positivo a correspondiente al punto y se indicará este punto con el símbolo a.

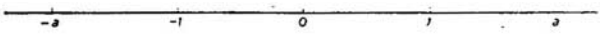

FIG. 2

Debe observarse que un cambio del punto unitario cambia la correspondencia entre los puntos y los números reales positivos. Por ejemplo, si la unidad es un centímetro y se cambia a un metro, el punto marcado con 200 centímetros resultará ser el marcado con 2 metros. Sin embargo, los números reales son fijos. Unicamente la correspondencia entre puntos y números es variable.

Si se prolonga el rayo hasta obtener una recta (fig. 2), se tiene entonces lo que normalmente es la idea intuitiva del conjunto de *todos* los números reales. Entonces se tiene *magnitud* y *sentido*. Los puntos a la izquierda del origen corresponderán ahora a los números reales negativos, los cuales son aún magnitudes, pero están dirigidos en el sentido opuesto al de los números reales positivos.

Los números reales pueden ahora sumarse gráficamente. Supóngase que a, b son dos números reales arbitrarios. Enton-

Fig. 3

ces se suma a a b tomando el segmento que va de O a b y poniéndolo en la recta de tal forma que el punto O caiga sobre el punto a. Entonces el extremo b quedará sobre $a + b$. Por ejemplo, si a y b son positivos, se tiene el diagrama de la figura 3. En el caso en que a es positivo y b es negativo se

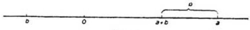

Fig. 4

tiene el diagrama de la figura 4. De manera semejante se puede formar $a - b$ tomando el segmento de O a b y colocándolo de tal forma que b caiga sobre a. Entonces el punto que antes era O resulta ser $a - b$. En caso de que a y b sean positivos,

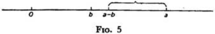

Fig. 5

el diagrama es como el de la figura 5. El resultado es el mismo que sumar a a el número $-b$.

La multiplicación de números reales no puede, sin embargo, describirse con este método gráfico y se dará más adelante la definición algebraica rigurosa y más abstracta del sistema de los números reales.

2. Los números racionales. Si b es un entero positivo cualquiera, la idea intuitiva de *número racional* (también llamado *fracción* o *fracción racional*)

$$\frac{1}{b}$$

es la de longitud de un segmento obtenido dividiendo el segmento de longitud uno en b partes iguales. Entonces si a es un número natural, el número racional a/b es la longitud de a de estas partes. Se sigue que si a es cero, a/b es cero. Análogamente, si $a > 0$, el número $-a/b$ es la longitud de a de estas partes, pero dirigida hacia la izquierda. En la figura 6 se dan varios ejemplos. Entonces las longitudes $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son

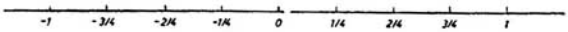

FIG. 6

iguales, $-\frac{3}{4}$ es el negativo de $\frac{3}{4}$ en el sentido de que su suma es cero. La idea intuitiva que se acaba de mencionar puede ser considerada como la que inspira la descripción general que se presentará ahora.

Un número racional α es una pareja de enteros a, b que se escribirá en la forma

$$\alpha = \frac{a}{b} = a/b$$

(léase "α es igual a a sobre b"). Aquí a es un entero y se llama el *numerador* de α; b es un entero diferente de cero y se llama el *denominador* de α. La primera definición de igualdad (es decir, de ser la misma pareja) se extiende ahora definiendo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{1}$$

si y sólo si

$$ad = bc. \tag{2}$$

Si b es un factor de a, es decir, $a = bq$, entonces el número racional a/b se *identifica* con el entero q. Así el conjunto de los números racionales es un sistema numérico que contiene al conjunto de todos los enteros. En particular, cada entero a puede expresarse siempre como el número racional

$$\frac{a}{1}.$$

Finalmente, la definición de igualdad es realmente equivalente a la propiedad de que

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \tag{3}$$

para todo entero no nulo c.

Para obtener la intuitivamente deseable propiedad

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \tag{4}$$

se define la *suma* de dos números racionales con la fórmula

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{5}$$

Se define también el *producto* con

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{6}$$

Con esto se completa la definición del *sistema numérico* de *todos los números racionales*.

Puede comprobarse que valen todas las leyes para operaciones enteras y que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \tag{7}$$

El número racional

$$0 = \frac{0}{b}$$

tiene la propiedad $\alpha + 0 = \alpha$ para toda α, $\alpha + (-\alpha) = 0$, en donde

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \qquad -\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}. \tag{8}$$

Obsérvese que las definiciones de suma y multiplicación dadas por las fórmulas (5) y (6), respectivamente, tienen sentido, ya que el producto bd de los denominadores $b \neq 0$, $d \neq 0$ es distinto de cero y, por lo tanto, puede usarse como denominador. Nótese también que la fórmula (4) puede obtenerse también de las fórmulas (5) y (3) escribiendo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ab + cb}{bb} = \frac{(a+c)b}{bb} = \frac{a+c}{b}.$$

Inversamente se puede obtener la fórmula (5) a partir de las fórmulas (3) y (4). En efecto,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Cada número racional puede escribirse en una y solamente una de las formas

$$\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}, \frac{0}{b} = 0, \tag{9}$$

en donde a y b son enteros positivos. Los números del primer tipo se llamarán *números racionales positivos* (o fracciones positivas), los números de la segunda forma, *números racionales* *negativos* y el único elemento del tercer tipo es el número racional cero. El concepto de valor absoluto que se vio para los enteros en el capítulo II se traslada al sistema de los racionales si se define $|\alpha| = \alpha$ si α es un número racional positivo o cero, $|\alpha| = |-\beta| = \beta$ si α es un número racional negativo.

EJERCICIOS ORALES

1. Expresar las siguientes fracciones en una de las formas de la fórmula (9):

(*a*) $-\dfrac{1}{-3}$ (*b*) $-\dfrac{1-3}{1-2}$ (*c*) $\dfrac{1-4}{5-2}$ (*d*) $1-\dfrac{6+2}{3+2}$

2. ¿Cuál es el valor absoluto de cada una de las siguientes fracciones?

(*a*) $\dfrac{4-2}{3-1}$ (*b*) $\dfrac{6-1}{3-1}$ (*c*) $\dfrac{1-6}{3-2}$ (*d*) $\dfrac{5-5}{3-11}$ (*e*) $1-\dfrac{8+1}{3+2}$

3. La ley de la división. El sistema numérico de los racionales tiene una propiedad adicional a las mencionadas en los capítulos I y II como propiedades de los enteros. Se enunciará ésta como una ley.

XI. LA LEY DE LA DIVISIÓN. *Si α y β son dos números tales que β no es cero, entonces existe un número único γ perteneciente al sistema numérico, tal que $\alpha = \beta\gamma$.*

A γ se le llama el *cociente* de α entre β y se escribe

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Entonces todo número racional es el cociente de dos números racionales que resultan ser también enteros. Así pues el sistema de los números racionales puede considerarse como el sistema obtenido de los enteros al adjuntarles todos los cocientes de enteros.

La comprobación de la nueva ley es una consecuencia de la fórmula

$$(10) \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

en donde $c \neq 0$. En particular,

$$(11) \qquad \frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \alpha\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

para todos los números racionales α y $\beta \neq 0$ y para todos los enteros $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Es a veces conveniente el uso de los casos especiales

$$(12) \qquad \frac{a}{c/d} = \frac{a/1}{c/d} = \frac{a}{1}\frac{d}{c} = \frac{ad}{c} \qquad \frac{ac}{b} = \frac{a}{b/c}$$

para todos los números enteros a, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Las fórmulas (10), (11) y (12) siguen siendo válidas si se reemplazan los enteros que en ellas figuran por fracciones.

EJERCICIOS ORALES

Expresar los números siguientes como cocientes a/b con a y b enteros:

(a) $\dfrac{5/6}{10/3}$ (d) $\dfrac{6}{2/5}$ (f) $\dfrac{3\frac{6}{4}}{3/5}$

(b) $\dfrac{1}{5/4}$ (e) $\dfrac{5\frac{4}{3}}{8/3}$ (g) $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - 1/2}}$

(c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{3 + 1/2}}$

4. Fracciones irreducibles. Todo número racional excepto el cero puede expresarse como un cociente a/b en donde b es un entero positivo, y a es positivo o negativo según a/b lo sea. Se dirá que a/b es *irreducible* si el m.c.d. de a y b es 1.

Si a/b no es irreducible y $d > 1$ es el m.c.d. de a y b, entonces $a = dg$, $b = dh$ en donde el m.c.d. de g y h es 1. Entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{dg}{dh} = \frac{g}{h},$$

y se ha expresado la fracción a/b como la fracción irreducible g/h. La expresión de un número como fracción irreducible es única.

Ejemplos ilustrativos

I. Expresar 11 604/15 472 como fracción irreducible.

Solución

Se encuentra el m.c.d.

$$\begin{array}{r|r|r} & 3 & 1 \\ \hline 3\,868 & 11\,604 & 15\,472 \\ & 11\,604 & 11\,604 \\ \hline & & 3\,868 \end{array}$$

de donde resulta que $15\,472 = 4(3\,868)$. *Resp.:* $\frac{3}{4}$.

II. Expresar la fracción siguiente como un cociente a/b irreducible:

$$\alpha = 27 - \cfrac{123}{6 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{3 - \frac{1}{2}}}}}$$

Solución

Se hacen las simplificaciones siguientes:

$$3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}, \qquad \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}, \qquad 4 - \frac{2}{5} = \frac{20-2}{5} = \frac{18}{5},$$

$$\frac{1}{\frac{18}{5}} = \frac{5}{18}, \qquad 5 - \frac{5}{18} = \frac{90-5}{18} = \frac{85}{18}, \qquad \frac{1}{\frac{85}{18}} = \frac{18}{85},$$

$$6 - \frac{18}{85} = \frac{510-18}{85} = \frac{492}{85}, \qquad \frac{123}{\frac{492}{85}} = 123 \cdot \frac{85}{492} = \frac{85}{4},$$

$$27 - \frac{85}{4} = \frac{108-85}{4} = \frac{23}{4}.$$

III. Sean $n = 15$, $m = 9$. Escríbanse todas las fracciones positivas a/b en donde a divide a n y b divide a m.

Solución

Los factores de 15 son 1, 3, 5, 15, y los de 9 son 1, 3, 9. Por consiguiente la respuesta es 1, 3, 5, 15, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{9}$.

EJERCICIOS

1. Escribir las fracciones siguientes en la forma irreducible:

(a) $\dfrac{812}{1\,044}$ (f) $\dfrac{888}{744}$

(b) $\dfrac{1\,038}{-2\,249}$ *Resp.:* $-\dfrac{6}{13}$. (g) $\dfrac{62}{31}+\dfrac{57}{108}$ *Resp.:* $\dfrac{91}{36}$.

(c) $\dfrac{-2\,730}{-1\,274}$ (h) $\dfrac{147}{21}-\dfrac{101}{105}$

(d) $-\dfrac{1\,027}{832}$ (i) $\dfrac{2\,175}{1\,450}-\dfrac{872}{1\,308}$ Resp.: $\dfrac{5}{6}$.

(e) $\dfrac{2\,268}{812}$ *Resp.:* $\dfrac{81}{29}$.

2. Simplificar las expresiones siguientes y escribirlas en forma irreducible:

(a) $\dfrac{\frac{5}{17}-\frac{6}{15}}{\frac{5}{17}+\frac{6}{15}}$ *Resp.:* $-\dfrac{9}{59}$. (d) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{5}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}$

(b) $\dfrac{\frac{3}{13}+\frac{6}{11}}{\frac{3}{13}-\frac{6}{11}}$

(c) $\dfrac{\frac{3}{18}-\frac{4}{9}+\frac{11}{45}}{\frac{-8}{18}+\frac{1}{9}-\frac{2}{45}}$ *Resp.:* $\dfrac{3}{34}$.

(e) $\dfrac{\dfrac{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}}{\dfrac{\frac{9}{13}-1}{\frac{8}{13}-1}}$ *Resp.:* $\dfrac{5}{28}$.

(*f*) $$\frac{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{11}\right)}{\left(\frac{5}{5}+\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{11}\right)}$$

(*g*) $$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-½}}}}$$

Resp.: —1

(*h*) $$\frac{1}{\left[2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}\right]+\left[3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3}}\right]}$$

(*i*) $$\frac{\left[\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}\right]\left[\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}\right]+\left[\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{11}}{\frac{1}{4}+\frac{2}{11}}\right]\left[\dfrac{\dfrac{6}{\frac{6}{7}-1}}{1-\frac{1}{19}}\right]}{\left[\dfrac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}\right]\left[\dfrac{1}{1-\frac{6}{7}}\right]}$$

Resp.: 5.

3. Escribir todas las fracciones positivas a/b tales que a divide a n y b divide a m:

(*a*) $n = 9$, $m = 15$
(*b*) $n = 24$, $m = 8$
(*c*) $n = 16$, $m = 12$
(*d*) $n = 180$, $m = 30$
(*e*) $n = —48$, $m = 20$
(*f*) $n = 90$, $m = —42$
(*g*) $n = 504$, $m = 60$
(*h*) $n = —512$, $m = 48$
(*i*) $n = —1\,080$, $m = —63$
(*j*) $n = 240$, $m = 143$

5. Las leyes de los exponentes. Las leyes de los exponentes que se han visto para los números enteros valen también para los números racionales. Se repiten a continuación:

$$(13)\qquad \alpha^n\alpha^m = \alpha^{n+m}, \qquad (\alpha^n)^m = \alpha^{nm}, \qquad \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n.$$

Aquí α y β son números racionales arbitrarios, y n y m son números naturales arbitrarios; α^0 se define igual a 1 para todo $\alpha \neq 0$.

Ahora se presenta un nuevo fenómeno debido a que todo número racional $\alpha = a/b$ tiene un inverso $\beta = b/a$ tal que $\alpha\beta = 1$. A veces a β se le llama el *recíproco* de α. Se define el símbolo

$$(14) \qquad \alpha^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$$

para todo $\alpha = a/b \neq 0$ y todo número natural n. Se sigue de la definición de multiplicación de la fórmula (6) que

$$(15) \quad \alpha^{-n} = (\alpha^n)^{-1}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)^n = \alpha^n \left(\frac{1}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

y que

$$(16) \qquad \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-n} = (\alpha^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right)^n = \alpha^n.$$

Se puede ahora probar que las fórmulas (13) valen también para *todos* los enteros n y m. Se tienen también las leyes adicionales

$$(17) \qquad \frac{\alpha^n}{\alpha^m} = \alpha^{n-m} = \frac{1}{\alpha^{m-n}}.$$

Es conveniente notar que

$$(18) \qquad \frac{\alpha^n\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha^{-n}\gamma}, \qquad \frac{\beta}{\alpha^n\gamma} = \frac{\alpha^{-n}\beta}{\gamma},$$

es decir, *un factor del numerador (denominador) puede llevarse al denominador (numerador) cambiando el signo de su exponente.*

No se darán las pruebas de estas propiedades.

EJERCICIOS

1. Expresar los siguientes números racionales como productos de potencias (con exponentes enteros) de los enteros 2, 3, 5:

(a) $\dfrac{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^4}{(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4)^3}$ *Resp.:* $2^6 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-8}$.

(b) $\dfrac{8 \cdot (75)}{(2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 45)^3}$

(c) $\dfrac{(2^3)^4 \cdot 3^{-8} \cdot 5^6}{2^{-4} \cdot 8^5 \cdot (3^{-10} \cdot 5^2)^4}$ *Resp.:* $2 \cdot 3^{32} \cdot 5^{-2}$.

(d) $\left(\dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4}{2 \cdot 3^4 \cdot 5^7}\right)^3$

(e) $5^4(3^7 \cdot 2^5)^3(3^{-14} \cdot 4^{-2} \cdot 5^{-1})$ *Resp.:* $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^3$.

(f) $(2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^{-5})^2(2^{-3} \cdot 5^{-4} \cdot 3^6)^{-3}$

2. Expresar los números siguientes como cocientes $2^n 7^m/3^r 5^t$ con n, m, r, t enteros:

(a) $\dfrac{(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^7}{(7^3 \cdot 4^{12} \cdot 15^4)^3}$ *Resp.:* $\dfrac{2^4 \cdot 7^{-9}}{3^{-9} \cdot 5^{-2}}$.

(b) $\dfrac{2^3 \cdot 5^6 \cdot 7^4}{5^8 \cdot 7^6 \cdot 2^9}$

(c) $\left(\dfrac{2^3 \cdot 7^4}{3^2 \cdot 5^4} \cdot \dfrac{3^5 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 7^8}\right)^{-4}$ *Resp.:* $\dfrac{2^4 \cdot 7^{16}}{3^{12} \cdot 5^{-4}}$.

(d) $\dfrac{(2^3 \cdot 3^2)^3(5^3 \cdot 7^6)^2}{(5^8 \cdot 7^2)^3(2^3 \cdot 3^4)^2}$

(e) $\dfrac{2^4 \cdot 3^6 \left(\dfrac{3^5 \cdot 5^6}{7^2 \cdot 4^3}\right)}{7^{-3} \cdot 5^{-4}}$ *Resp.:* $\dfrac{2^{-3} \cdot 7}{3^{-11} \cdot 5^{-10}}$.

(f) $\dfrac{2^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 4^{-5} \cdot 5^{-6}}{6^{-7} \cdot 7^{-8} \cdot 8^{-9} \cdot 9^{-10}}$

6. Decimales. Un número *decimal finito* es una sucesión finita de dígitos con un punto decimal, como por ejemplo 1 472.697, o el negativo de tal sucesión. El punto decimal tiene la propiedad de que el entero obtenido al suprimir dicho punto y dividir por una potencia apropiada de 10 es el número decimal dado. Por ejemplo,

$$-1\,472.697 = \frac{-1\,472\,697}{10^3}.$$

Ya que los números decimales finitos son números racionales, sus sumas, productos, diferencias y cocientes son también números racionales. Estas sumas, productos y diferencias son también decimales finitos y pueden obtenerse con los procedimientos usuales de la aritmética elemental. El cociente de dos decimales finitos se puede expresar como el cociente de dos enteros, y cuando se expresa en su forma irreducible, se puede expresar como un número decimal finito si y solamente si todos los factores primos del denominador son 2 ó 5. En el caso contrario, el proceso de la división de la aritmética elemental da lugar a un decimal infinito. Así, por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

Un número decimal infinito es una sucesión infinita de dígitos con un punto decimal y un signo. Los números decimales infinitos pueden describirse en términos de un concepto llamado *aproximación*. Se define la *primera aproximación* de un número decimal α como el entero que aparece a la izquierda del punto decimal de α. Este es un entero de r dígitos que puede ser cero, positivo o negativo. Se designará a esta aproximación con a_0. Defínese a_k como el número decimal finito de $r + k$ dígitos formado con los primeros $r + k$ dígitos de α. Cuando α es también decimal finito, como, por ejemplo,

$$643.29654,$$

los dígitos que se adjuntan, a partir de cierto punto serán cero, y las aproximaciones a partir de cierto punto serán α. En efecto, éstas son

$$\begin{aligned} &a_0 = 643, \quad a_1 = 643.2, \quad a_2 = 643.29, \\ &a_3 = 643.296, \quad a_4 = 643.2965, \quad a_5 = 643.29654 \\ &\qquad\qquad = \alpha = a_7 = a_8 = \ldots \end{aligned}$$

Nótese que la aproximación a_1 es 643.2 y no 643.3 aunque $a_2 = 643.29$. No se está redondeando los dígitos, sino tomándolos tal y como aparecen.

Un número decimal α puede ahora representarse como una sucesión infinita

$$a_0, a_1 \ldots$$

de decimales finitos a_k formada con sus aproximaciones. Más aún, esta sucesión tiene la propiedad de que los primeros $r + k$ dígitos de todas las aproximaciones $a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots$ son exactamente los mismos y todos tienen el mismo signo. Por ejemplo, si $\alpha = -462.3578965942\ldots$, los primeros 8 dígitos de todas las aproximaciones $a_5, a_6 \ldots$ son -462.35789.

Finalmente se acuerda que todo número decimal infinito α, tal que a partir de cierto lugar todas las cifras sean 9, se identificará con la decimal finita obtenida al suprimir todos los 9 y añadiendo una unidad al dígito a la izquierda del primero de los 9 de la sucesión infinita de 9 suprimida. Por ejemplo,

$$-199.98999\ldots = -199.99; \quad 0.999\ldots = 1.$$

7. El sistema de los números reales. Se define ahora un *número real* como un número decimal infinito positivo, cero o negativo. Se conviene además en que dos decimales son números reales iguales si y sólo si tienen los mismos dígitos o bien uno se obtiene del otro mediante el proceso de tachar los nueves anteriormente expuesto.

La definición de números reales que se acaba de dar es completa y al conjunto de números reales se le llamará el *sistema de los números reales* en cuanto se diga cómo se suman, restan, multiplican y dividen. Se darán estas definiciones en términos del siguiente concepto importante.

Considérese una sucesión infinita

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots$$

cuyos miembros (términos) son números reales. Supóngase que para *cada entero positivo k* existe un lugar en la sucesión (este lugar dependerá de *k*) a partir del cual todos los miembros de la sucesión tienen el mismo signo y los mismos primeros k dígitos. Entonces se dirá que esta sucesión es *convergente*.

Toda sucesión convergente define un número decimal infinito y, por consiguiente, un número real cuyos dígitos pueden obtenerse de los dígitos de los términos de la sucesión convergente. A este número se le llama el *límite* de la sucesión. El ejemplo más simple de sucesión convergente es desde luego la sucesión de aproximaciones de un número real, y el número real es en este caso su límite. Más adelante se darán ejemplos más complicados.

Ahora se pueden definir ya fácilmente las operaciones entre números reales. Sea $a_0, a_1 \ldots$ la sucesión de aproximaciones de α, y $b_0, b_1 \ldots$ la sucesión de aproximaciones de β. Entonces resultará cierto que la sucesión $c_0, c_1 \ldots$ de sumas $c_i = a_i + b_i$ es una sucesión convergente, y se define $\alpha + \beta$ como su límite. Análogamente $\alpha - \beta$ es el límite de la sucesión de diferencias $a_i - b_i$, $\alpha\beta$ es el límite de la sucesión de productos $a_i b_i$. Finalmente, si β no es cero, se puede suprimir un número finito de los términos de su sucesión y obtener una sucesión convergente con el mismo límite β pero en la cual *todos* los términos son distintos de cero. Por ejemplo, la sucesión para $\frac{1}{3}$ es 0, 0.3, 0.33, 0.333, etc., y puede reemplazarse por 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, etc. Si se designan con $\beta_0, \beta_1 \ldots$ los términos de la nueva sucesión convergente para β, entonces β_i es un número decimal finito diferente de cero y la sucesión de números racionales a_i/b_i es una sucesión convergente cuyo límite es el cociente α/β.

Obsérvese que las sucesiones para α y β que se han usado son sucesiones de números racionales y que se han definido $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$ y α/β en términos del concepto de límite y de las operaciones correspondientes para números racionales. No es del todo obvio que la suma, diferencia, producto y cociente de los términos de las sucesiones mencionadas forman sucesiones convergentes, pero aquí se omitirán las demostraciones.

También se omitirá la demostración de que el sistema de los números reales satisface las 11 leyes que se han mencionado para los demás sistemas numéricos, así como las leyes de los exponentes. Más aún, el sistema de los números reales está ordenado mediante la propiedad de que a es mayor que b (b es menor que a) si $a - b$ es un número real positivo.

Ejemplos ilustrativos

I. Sea $\alpha = 3.165\ldots$, $\beta = 2.153\ldots$ Calcúlense todas las cifras posibles de $\alpha + \beta$.

Solución

Obsérvese que $a_0 + b_0 = 3 + 2 = 5$, $a_1 + b_1 = 3.1 + 2.1 = 5.2$,

$$a_2 + b_2 = 3.16 + 2.15 = 5.31,$$
$$a_3 + b_3 = 3.165 + 2.153 = 5.318.$$

De la información aquí obtenida se puede estar casi seguro de que

$$\alpha + \beta = 5.31\ldots$$

En efecto, si $\alpha = 3.1659\ldots$ y $\beta = 2.153999\ldots$, se tiene

$$a_4 + b_4 = 5.3198$$

y por lo tanto 5.318 es falso . En el caso más extremo, cuando

$$\alpha = 3.165999\ldots,$$
$$\beta = 2.153999\ldots,$$

se tiene que $\alpha = 3.166$, $\beta = 2.154$, y por consiguiente, $\alpha + \beta = 5.320$, pero en cualquier otro caso $5.31\ldots$ es correcto.

Observación: Es cierto, en general, que el uso de las aproximaciones de orden $k + 1$ de α y β conducen a un valor correcto de la aproximación c_k de orden k de $\alpha + \beta$ o $\alpha - \beta$. Sin embargo, esto no es cierto para productos. En efecto, supóngase que $\alpha = 300$, $\beta = 1/3 = 0.333\ldots$, es decir, $\alpha\beta = 100$. Se tiene que $a_0 = a_1 = \ldots = 300$; $a_0b_0 = 0$, $a_1b_1 = 90$, $a_2b_2 = 99$, $a_3b_3 = 99.9$, $a_4b_4 = 99.99$, y se ve que a_0b_0 y a_1b_1 no se acercan al valor correcto de $c_0 = c_1 = 100$.

II. Sea α el número real definido con las fórmulas

$$a_0 = 0.4,$$
$$a_{i+1} = a_i + (0.8)(0.5 - a_i).$$

Calcular las cinco primeras aproximaciones de α y hállese su valor.

Solución

$$\alpha_1 = 0.4 + (0.8)(0.1) = 0.48,$$
$$\alpha_2 = 0.48 + (0.8)(0.02) = 0.496,$$
$$\alpha_3 = 0.496 + 0.8(0.004) = 0.4992,$$
$$\alpha_4 = 0.4992 + (0.8)(0.0008) = 0.49984,$$
$$\alpha_5 = 0.49984 + 0.8(0.00016) = 0.499968.$$

Resp.: $\alpha = 0.5$.

Observación: Si $r \neq 0$ es un número decimal finito arbitrario entre 0 y 0.5 y se define $\alpha_0 = r$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 2r(0.5 - \alpha_i)$, la sucesión es convergente y tiene a 0.5 como límite. Converge despacio cuando r es casi cero, es decir, hay que tomar muchos términos para acercarse al límite $\frac{1}{2}$. Como se vio, converge rápidamente cuando r está cerca de 0.5.

EJERCICIOS

1. Calcular las primeras ocho aproximaciones al número definido por $\alpha_0 = 0.3$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 0.6(0.5 - \alpha_i)$.

2. Calcular las primeras once aproximaciones al número definido por $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 0.2(0.5 - \alpha_i)$.

8. Potencias reales positivas de números reales positivos. Todo número real *positivo* a determina un número real positivo único.

$$b = \sqrt[n]{a}$$

(léase "b igual a raíz enésima de a") para todo entero positivo n. Entonces b está definido como aquel número real positivo cuya enésima potencia b^n es igual a a. En el artículo 13 se dará una fórmula para b. En el capítulo VII se demostrará que hay solamente un número tal para cada n y a. Nótese que se acostumbra escribir $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$ y que $\sqrt[1]{b} = b$.

Al símbolo $\sqrt[n]{b}$ se le llama un *radical.* Los cálculos con radicales no son tan simples como los cálculos con exponentes, y es preferible usar la forma de exponentes fraccionarios definidos por

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \tag{19}$$

(léase "la raíz enésima de a es igual a a elevado a la potencia uno entre n"). Se define también la potencia fraccionaria

(20) $$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

(léase $a^{m/n}$ así: "a elevado a la potencia m entre n") para todos los números racionales m/n, y se ve que

(21) $$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}.$$

En efecto, $[(a^{1/n})^m]^n = (a^{1/n})^{mn} = [(a^{1/n})^n]^m = a^m$ y, por consiguiente, $(a^{1/n})^m$ es la raíz enésima $(a^m)^{1/n}$ de a^m.

Se puede ahora definir la potencia real positiva a^n para todo número real positivo a y todo número real n. Sea n_0, n_1, $n_2, \ldots$ una sucesión de aproximación para n de modo que cada n_i sea un número decimal finito. Entonces cada n_i es un número racional y define un número real positivo $b_i = a^{n_i}$. Puede probarse que la sucesión $b_0, b_1 \ldots$ es convergente y tiene un límite positivo b. Se define a^n como igual a este límite.

Se puede observar ahora que, como se ha mencionado en cada caso, la exposición aquí dada carece de varias demostraciones. El material omitido es adecuado únicamente para cursos mucho más avanzados y no conviene presentarlo aquí. Sin embargo, es de creer que lo expuesto aquí ayudará mucho a conseguir una visión clara del concepto fundamental de potencias reales positivas de números reales. Se enunciará ahora, sin demostrarla, la siguiente extensión de las leyes para exponentes:

Teorema 1. *Las potencias reales positivas de números reales positivos satisfacen las siguientes leyes para exponentes:*

(22) $$a^n a^m = a^{m+n}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}; \quad a^0 = 1 = 1^n;$$
$$(a^n)^m = a^{nm}; \quad a^n b^n = (ab)^n,$$

en donde a *y* b *son números reales positivos arbitrarios y* n *y* m *son números reales arbitrarios.*

Las leyes para exponentes en el caso en que los exponentes son fracciones $1/n$ con n entero distinto de cero, pueden expresarse como fórmulas para operar con radicales. Estas son:

$$(23) \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}.$$

Es importante observar que

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a}.$$

Así, por ejemplo, $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ ya que $8 = 2^3$. También puede introducirse un número dentro de su radical y escribir

$$2\sqrt[3]{a/2} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{a/2} = \sqrt[3]{2^3 a/2} = \sqrt[3]{4a}.$$

Desde luego todos los números a y b en estas fórmulas son positivos, y es de notar que *todos los radicales son positivos.*

Si a es negativo y n es un entero impar, se puede escribir $a = -d$, en donde d es positivo. Entonces, con n impar,

$$a^{1/n} = (-d)^{1/n} = -d^{1/n}$$

es un número real negativo único. Sin embargo $a^{1/2}$ no es un número real ya que $(a^{1/2})^2$ es positivo siempre que $a^{1/2}$ sea real, y debe ser negativo si a es negativo. El sentido de a^n para a negativo y n real es evidentemente un concepto excesivamente complicado que no se tratará más en este texto. En el capítulo VIII se estudiará el significado de $a^{1/n}$ para enteros n y números reales negativos a.

Ejemplos ilustrativos

I. Expresar el número $a = \sqrt[3]{2}\,\sqrt{5}\,\sqrt[4]{3}$ como un entero elevado a una potencia fraccionaria.

Solución

$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$, $\sqrt{5} = 5^{1/2}$; $\sqrt[4]{3} = 3^{1/4}$. El mínimo común denominador de los exponentes es 12 y se puede escribir

$$a = 2^{4/12} \cdot 5^{6/12} \cdot 3^{3/12} = (2^4 \cdot 5^6 \cdot 3^3)^{1/12}.$$

II. Simplifíquese $a = \sqrt{8} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 5\sqrt[4]{4}.$

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2},\ \sqrt{18} = 3\sqrt{2},\ \sqrt[4]{4} = (2^2)^{1/4} \\ &= 2^{1/2} = \sqrt{2},\ a = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= (2 + 3 - 12 + 5)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Expresar los números siguientes como potencias de un entero:

(a) $\sqrt[3]{27}\ \sqrt[4]{64}$ *Resp.:* $(72)^{1/2}$.

(b) $\sqrt{3}\ \sqrt[3]{2}$

(c) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt[4]{4 \cdot 27}$ *Resp.:* $(3\,888)^{1/4}$.

(d) $\sqrt[3]{3}\ \sqrt{15}\ \sqrt[4]{8}$

(e) $\dfrac{\sqrt[12]{36}}{\sqrt{2}}$ *Resp.:* $(162)^{1/6}$.

(f) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{12}}$

(g) $6\sqrt{1/8}\ \sqrt[3]{1/81}$ *Resp.:* $72^{-1/6}$.

(h) $\dfrac{\sqrt[3]{12}\ \sqrt[6]{1\,000}}{\sqrt[3]{15}}$

2. Escríbanse las siguientes expresiones en la forma $\sqrt[n]{a}$, en donde n es un entero positivo:

(a) $2\sqrt{2}$

(b) $6\sqrt{3}$

(c) $10\sqrt[5]{1/10}$

(d) $6\sqrt[4]{2/3}$

(e) $x\sqrt[8]{\dfrac{3}{x^3}}$

(f) $\sqrt[3]{x}\ \sqrt{y^3}$

(g) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$

(h) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{y}}$

3. Simplifíquense las expresiones siguientes:

(*a*) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 4\sqrt{24}$

(*b*) $-6\sqrt[3]{54} + 10\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{150}$

(*c*) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}) + \sqrt[4]{12} - \sqrt[3]{18}$

(*d*) $(\sqrt{3} - \sqrt{10})(\sqrt{3} + \sqrt{10})$

(*e*) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}$

(*f*) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3}} - \dfrac{\sqrt[4]{160}}{\sqrt[4]{5}}$

9. **Logaritmos** (CURSO COMPLETO). Sea a un número real indicado mayor que 1. Entonces puede demostrarse que para cada número real positivo c existe un exponente n tal que

$$a^n = c.$$

Se dará una fórmula para el cálculo de n en el artículo 12.

El exponente n queda determinado de una manera única por c (y por el número indicado a) y se llama el *logaritmo de* c *de base* a. Se denotará con $\log_a c$, y, por lo tanto, se tiene la propiedad que lo define

$$a^{\log_a c} = c.$$

La base que más se usa para propósitos de cálculos es la base $a = 10$. Así una tabla de logaritmos *comunes* es una tabla de números c y los correspondientes exponentes $n = \log_{10} c$ tales que $10^n = c$. Por ejemplo, $10^2 = 100$, es decir, $\log_{10} 100 = 2$. También el logaritmo de 2 con base 10 es aproximadamente 0.30103, es decir, $10^{0.30103}$ es aproximadamente igual a 2.

Ya que los logaritmos son exponentes, las leyes para exponentes se pueden trasladar en leyes para los logaritmos. Sean c y d números reales positivos arbitrarios y escríbase $c = a^n$, $d = a^m$, en donde $n = \log_a c, m = \log_a d$. Luego, $cd = a^n a^m = a^{n+m}$. Por lo tanto, $\log_a cd = n + m$, obteniendo así la fórmula

(24) $$\log_a cd = \log_a c + \log_a d.$$

En otras palabras, se tiene la propiedad siguiente:

PROPIEDAD I. *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*

En forma análoga, se tiene $c/d = a^n/a^m = a^{n-m}$. De aquí resulta

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d. \tag{25}$$

Este resultado puede enunciarse como sigue:

PROPIEDAD II. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

Si $g = c^m$ y $\log_a c = n$ entonces $g = (a^n)^m = a^{nm}$, de donde $\log_a c^m = mn$; es decir,

$$\log_a c^m = m \log_a c. \tag{26}$$

Este resultado puede enunciarse como sigue:

PROPIEDAD III. *El logaritmo de una potencia* c^m *es igual al producto del exponente* m *por el logaritmo de* c.

La propiedad III vale para todos los exponentes reales y puede usarse, en particular, para exponentes fraccionarios. Por ejemplo, $\log_{10} \sqrt{2} = \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{10} 2 = 0.15051$ aproximadamente.

Obsérvese ahora que todo número real positivo c puede expresarse como un producto

$$c = 10^t h,$$

en donde h es un número real entre 1 y 10. En efecto, h puede obtenerse de una expresión decimal para c moviendo el punto decimal hasta la derecha del primer dígito de c distinto de cero (empezando por la izquierda). Por ejemplo,

$$145.632 = 10^2(1.45632), \quad 0.00435 = 10^{-3}(4.35).$$

Entonces $\log_{10} 10^t = t$, y

$$\log_{10} c = t + \log_{10} h. \tag{27}$$

Será entonces suficiente construir una tabla de los valores aproximados de los logaritmos de base 10 para todos los decimales de k cifras entre 1 y 10 para con ella obtener los valores aproximados de los logaritmos de todos los números. Estas tablas se usan frecuentemente en la trigonometría.

Al entero t se le llama la *característica* del $\log_{10} c$. Este puede ser cualquier número entero positivo o negativo. El número real $\log_{10} h$ es un número positivo entre 0 y 1, llamado *mantisa* del $\log_{10} c$. Por ejemplo,

$$\log_{10} 0.2 = -1 + 0.30103, \quad \log_{10} 200 = 2.30103,$$
$$\log_{10} 2\,000\,000 = 6.30103.$$

Los cálculos con logaritmos se tratan con más detalle en los cursos de trigonometría y aquí no se discutirán más.

En la rama de las matemáticas llamada *cálculo* es más útil una base distinta de 10. La base usada es el número real

$$e = 2.7182818285\ldots$$

Aquí se dará la definición del número real e en el artículo 12. Los logaritmos con base e se llaman logaritmos *neperianos* o *naturales* y se acostumbra denotarlos con $\ln c$ (léase simplemente "logaritmo natural de c"), mientras que los logaritmos comunes se denotan usualmente con $\log a$. Esta última notación es usada también en algunos textos de cálculo en lugar de $\ln c$.

Ejemplos ilustrativos

I. ¿Cuál es la característica de log 341.62?

Solución

La *característica de* $\log_{10} a$ *es, en valor absoluto, una unidad menor que el número de dígitos a la izquierda del punto decimal en* a. Por lo tanto, la respuesta es 2.

II. Hállense los logaritmos (con cinco decimales) de 2, 0.2, 0.02. 0.00002.

Solución

El número de dígitos a la izquierda del punto decimal en 2 es 1. Por lo tanto, su característica es 0. El número de dígitos a la izquierda del punto decimal en 0.2, 0.02, 0.00002 es, respectivamente, 0, —1, —4, y sus características son, pues, —1, —2, —5. En efecto, $0.2 = 10^{-1}(2)$, $0.02 = 10^{-2}(2)$, $0.00002 = 10^{-5}(2)$. Por lo tanto, $\log 2 = 0.30103$, $\log 0.2 = 0.30103 - 1$, $\log 0.02 = 0.30103 - 2$, $\log 0.00002 = 0.30103 - 5$.

EJERCICIOS ORALES

1. Hallar las características de los logaritmos comunes de los números siguientes:

(*a*) 34 156.2
(*b*) 32 134 569
(*c*) 0.00123
(*d*) 0.142
(*e*) 1.423
(*f*) 0.0213
(*g*) 0.0000003
(*h*) 56.0000012

2. Hallar los logaritmos siguientes:

(*a*) $\log_2 8$
(*b*) $\log_2 \sqrt{8}$
(*c*) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
(*d*) $\log_2 \sqrt[4]{4}$
(*e*) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(*f*) $\log_{10} 1\,000$
(*g*) $\log_{10} (0.001)$
(*h*) $\log_{10} (0.01) \sqrt{10}$
(*i*) $\log_{10} (0.001) \sqrt[3]{10}$
(*j*) $\log_e e^{\sqrt{2}}$

3. Hallar x si

(*a*) $\log_2 x = 3$
(*b*) $\log_3 x = 2$
(*c*) $\log_4 x = -2$
(*d*) $\log_9 x = 3/2$
(*e*) $\log_{27} x = 5/3$
(*f*) $\log_{16} x = -3/4$

4. Hallar x si

(*a*) $\log_x 100 = 2$
(*b*) $\log_x e^2 = 2$
(*c*) $\log_x e^3 = 3$
(*d*) $\log_x 100 = 3$
(*e*) $\log_x 64 = 3$
(*f*) $\log_x 64 = 6$
(*g*) $\log_x 2 = 1/2$
(*h*) $\log_x 9 = 2/3$

EJERCICIOS

1. Sabiendo que $\log 2 = 0.301$ y $\log 3 = 0.477$, calcúlense:

(a) $\log 4$	*(f)* $\log 6$
(b) $\log 8$	*(g)* $\log 12$
(c) $\log 0.5 = \log 1/2$	*(h)* $\log 3/2$
(d) $\log 5 = \log 10/2$	*(i)* $\log 8/5$
(e) $\log 9$	*(j)* $\log 12/5$

2. Usando los logaritmos calculados en 1, hállense con dos decimales de aproximación:

(a) $\log 7 =$ aprox. $\log \sqrt{50}$

(b) $\log 11 =$ aprox. $\log \sqrt{125}$

(c) $\log 13 =$ aprox. $\log \sqrt[3]{2\,200}$

(d) $\log 17 =$ aprox. $\log \sqrt{290}$, si $\log 29 = 1.4624$

10. Cambio de base (CURSO COMPLETO). Si se cambia la base de un sistema de logaritmos por otra, los logaritmos en el nuevo sistema se relacionan muy simplemente con los del sistema anterior.

En efecto, sea a la primera base y b la nueva base. Entonces $a = b^r$ en donde $r = \log_b a$. Si c es un número positivo arbitrario y $c = a^n = b^m$, en donde $n = \log_a c$ y $m = \log_b c$, entonces $c = b^{rn}$, de donde $m = rn$. Esto demuestra la fórmula

$$\log_b c = (\log_a c)(\log_b a), \tag{28}$$

es decir, el logaritmo de c con base b es igual al producto del logaritmo de c con base a por el logaritmo de a con base b.

Ya que $\log_b b = 1$ cualquiera que sea el valor de $b > 1$, se tiene

$$\log_a b \log_b a = 1,$$

es decir, los números $\log_b a$ y $\log_a b$ son recíprocos. En particular,

$$\ln 10 = \frac{1}{\log e}, \qquad \ln c = (\log c)(\ln 10) = \frac{\log c}{\log e}, \tag{29}$$

para todos los números positivos c. Con cálculos directos se obtienen las fórmulas aproximadas

$$\log e = 0.4342945, \qquad \ln 10 = 2.302585.$$

EJERCICIOS

Usar el valor $\ln = 2.30$ y los valores dados en el artículo 9 para calcular:

(*a*) $\ln 2$	(*c*) $\ln 5$	(*e*) $\ln 60$	(*g*) $\ln 1/12$
(*b*) $\ln 3$	(*d*) $\ln 90$	(*f*) $\ln 1/4$	(*h*) $\ln 1/15$

11. Irracionalidad de números reales. Un número real se llama *irracional* cuando *no es racional*. Si n es un entero mayor que 1 y p un entero primo positivo, el número $\sqrt[n]{p}$ es irracional. En efecto, supóngase que $a/b = \sqrt[n]{p}$ con a y b enteros. Entonces $a = b(\sqrt[n]{p})$, $a^n = b^n p$. Esto se demostró que era imposible en el ejemplo ilustrativo del final del capítulo II.

No es cosa sencilla demostrar si un número real dado es o no racional, pero por lo menos se puede desarrollar un criterio para dicha propiedad. Se dice que un número decimal es *periódico de período n* si existe un grupo de n dígitos que a partir de cierto lugar se repiten para completar la sucesión infinita de todos los dígitos del número decimal. Por ejemplo,

$$361.793842568425684256\ldots$$

es un número decimal periódico de período cinco si se supone que todos los dígitos que figuran en los puntos suspensivos se obtienen repitiendo el grupo de dígitos 84256. Ahora se puede dar una demostración formal de lo expuesto.

Teorema 2. *Un número decimal infinito es racional si y sólo si es un número decimal periódico. Si* n *es el período de* d *entonces existe un número decimal finito* b *tal que*

$$d = \frac{b}{10^n - 1}. \tag{30}$$

Si se multiplica un número decimal periódico de período n por 10, el resultado es la misma sucesión de dígitos, pero con el punto decimal corrido un lugar a la derecha. Entonces d es un número decimal de período n si y sólo si n es el entero menor tal que los dígitos de $10^n d$ son, a partir de cierto lugar, exactamente los mismos que los dígitos de d colocados en los lugares correspondientes. Entonces $b = 10^n d - d = (10^n - 1)d$ es un número decimal finito y se tiene de aquí la fórmula (30).

Inversamente, supóngase que d es un número racional; sea $d = c/e$ con c y e enteros mayores que cero. Entonces quedará demostrado que d es un número decimal periódico si se demuestra que existe un entero n tal que $(10^n - 1)d$ es un número decimal finito. Obsérvese que los únicos residuos de dividir enteros por e son los e números $0, 1, 2 \ldots, e - 1$ y, por lo tanto, que los $e + 1$ números $1, 10, 10^2, \ldots, 10^e$ no pueden tener todos residuos distintos. Entonces existen dos enteros g y h tales que $e \geqq g > h \geqq 0$ y que 10^g y 10^h dan el mismo residuo cuando se los divide por e. Entonces $10^g - 10^h$ será divisible por e. Siendo $n = g - h$, n es un entero positivo, y $10^g - 10^h = 10^h(10^n - 1) = eq$ con q entero. Entonces

$$(10^n - 1)d = \frac{10^h(10^n - 1)c}{10^h e} = \frac{qec}{10^h e} = \frac{qc}{10^h} = b.$$

Ya que q y c son enteros, el número b es un número decimal finito. Esto prueba que d es un decimal periódico.

EJERCICIOS

1. Expresar las fracciones siguientes con decimales periódicos efectuando la división y dígase el número de dígitos del período mínimo.

(a) $1/6$	(c) $4/9$	(e) $3/13$	(g) $11/19$
(b) $2/7$	(d) $8/11$	(f) $5/17$	(h) $23/27$

2. Expresar los números decimales periódicos siguientes como números racionales en forma irreducible:

(a)	1.714285714285 ...	*(e)*	0.120120 ...	*Resp.*: $40/333$
(b)	3.70370 ...	*(f)*	0.132132 ...	*Resp.*: $44/333$
(c)	0.076923076923 ...	*(g)*	0.10241024 ...	*Resp.*: $1024/9999$
(d)	0.1212 ...	*(h)*	2.111211121 ...	*Resp.*: $21110/9999$.

12. Los símbolos pi y sigma. Una notación simple para la suma s_n de los primeros n términos de una sucesión $a_1, a_2 \ldots$ es

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(léase "a_1 más a_2, más etc., más a_n"). Para $n = 1$ esta suma se reduce a un solo término, es decir, $s_1 = a_1$. Otra notación más corta para la misma suma se da con la letra griega sigma mayúscula. Esta es

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

y se usa con mucha frecuencia en matemáticas (léase "suma de a_i para i desde uno hasta n"). El símbolo $\sum_{i=0}^{n} a_i$ se usa para la suma de los primeros $n + 1$ términos de una sucesión cuyo primer término sea a_0, y generalmente, $\sum_{i=m}^{n} a_i$ es la suma de los términos a partir del emésimo y continuando con los de los subíndices enteros consecutivos hasta el enésimo. Por ejemplo, $\sum_{i=5}^{10} a_i = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$. Se usará este símbolo únicamente para $m < n$.

El producto p_n de los primeros n términos de una sucesión $a_1, a_2 \ldots$ puede representarse como

$$p_n = a_1 a_2 \ldots a_n$$

(léase "a_1 por a_2 por etc., por a_n"). Como antes, $p_1 = a_1$. Se tiene también una notación para la cual se usa la letra mayúscula griega pi:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

(léase "el producto para i desde 1 hasta n de a_i"). También se definen

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 a_1 \ldots a_n, \text{ y } \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m a_{m+1} \ldots a_n$$

para $m < n$.

EJERCICIOS ORALES

1. Dígase cuál es el significado de $\sum_{i=1}^{7} a_i$ para los casos siguientes:

(a) $a_i = i$

(b) $a_i = 2i$

(c) $a_i = 2i - 1$

(d) $a_i = 2i + 1$

(e) $a_i = 3i + 1$

(f) $a_i = \dfrac{1}{i!}$

(g) $a_i = C_{7,i}$

(h) $a_i = b_i x^i$

(i) $a_i = b_{7-i} x^i$

(j) $a_i = b_{i-1} x^{7-i}$

(k) $a_i = \sum_{j=1}^{3} j^i$

(l) $a_i = \sum_{j=1}^{7} j y^i$

2. Dígase cuál es el significado de las expresiones siguientes:

(a) $\sum_{i=1}^{5} (i^2 - 1)$

(b) $\prod_{i=1}^{5} \left(1 + \dfrac{1}{i}\right)^i$

(c) $\prod_{i=1}^{5} \left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{10} \left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right)$

(e) $\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right)$

(f) $\prod_{i=1}^{10} \dfrac{i}{i+1}$

(g) $\prod_{i=1}^{10} \dfrac{2i-1}{2i+1}$

(h) $\prod_{i=1}^{4} \dfrac{i^2 - 1}{i^3 - 1}$

13. **Series y productos infinitos.** A toda sucesión infinita $a_1, a_2 \ldots$ de números reales se le puede asociar una sucesión $s_1, s_2 \ldots$ en donde

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{31}$$

es la suma de los n términos primeros de la sucesión original. Esta sucesión de sumas se llama una *serie infinita* o simplemente una *serie* y se designa ordinariamente con

$$a_1 + a_2 + \dots,$$

o con la notación

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{32}$$

(léase "suma de a_i para i desde 1 hasta infinito").

Una serie (32) se llama *convergente* si la sucesión de números reales $s_1, s_2, \dots$ definida por la fórmula (31) es una sucesión convergente. Entonces el número real s, límite de la sucesión $s_1, s_2 \dots$, se llama *suma* de la serie y se escribe

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Las series no convergentes, como por ejemplo,

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

que *diverge*, o bien $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, que *oscila*, no se discutirán aquí.

Toda sucesión infinita $a_1, a_2, \dots$ define también una sucesión infinita $P_1, P_2 \dots$ de productos

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{33}$$

Entonces a la sucesión $P_1, P_2, \dots$ se le llama un *producto infinito*, y se denota con $a_1a_2 \dots$ o, mejor aún, con

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Si la sucesión $P_1, P_2, \dots$ converge y su límite es el número real P, se escribe

$$P = \prod_{i=1}^{\infty} a_i. \tag{34}$$

Las series y los productos infinitos son importantes en el cálculo de algunas constantes matemáticas. Por ejemplo, la razón π de la longitud de la circunferencia al diámetro puede calcularse usando

$$(35)\quad \frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+\ldots,$$

es decir,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

en donde

$$a_i=\frac{(-1)^{i-1}}{m}\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)\qquad m=2i-1.$$

La base e de los logaritmos neperianos puede calcularse usando la serie

$$(36)\qquad e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\ldots$$

Para calcular los logaritmos naturales de cualquier número real positivo a, puede procederse como sigue. Si $a>1$, el número real

$$(37)\qquad x=\frac{a-1}{a+1}=\frac{1-\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{a}}$$

es positivo y menor que uno, y se puede calcular el logaritmo con la fórmula

$$(38)\qquad \ln a=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)$$

Si $0 < a < 1$, entonces $b = 1/a > 1$ y $\ln a = -\ln b$. Evidentemente la fórmula $\log_{10} a = \ln a \cdot \log_{10} e$ puede usarse junto con la fórmula (38) para calcular los logaritmos comunes.

La raíz n-ésima positiva de un número real positivo puede calcularse usando la llamada *serie binomial*

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

El término $n+1$ de esta serie es

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

y la serie es convergente, siendo $(1+x)^m$ su límite siempre que $-1 < x < 1$. Para calcular la raíz n-ésima de un número real positivo a, se escribe

$$a = b^n + c = b^n(1+x), \qquad x = \frac{c}{b^n} < 1.$$

Entonces $\sqrt[n]{a} = b(1+x)^{1/n}$, y se calcula $(1+x)^m$ mediante la fórmula de arriba, con $m = 1/n$ y el valor de x mencionado. No se tratará aquí la cuestión de lo correctas que son las aproximaciones que se van obteniendo. Solamente se dará la siguiente proposición. Sea $a_1 + a_2 + \ldots$ una serie infinita convergente tal que los signos van alternando. Entonces si s es la suma de la serie, se sabe que el valor absoluto de $s - s_n$ es menor que $|a_{n+1}|$.

Ejemplos ilustrativos

Calcular $\sqrt[3]{37}$ con dos decimales de aproximación.

Solución

$$37 = 27 + 10, \qquad \sqrt[3]{37} = 3\sqrt[3]{1 + 10/27}.$$

Por lo tanto $m = 1/3$, $x = 10/27$, y

$$\sqrt[3]{37} = 3\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \ldots\right)$$
$$= 3 + \frac{10}{27} - \frac{1}{3}\left(\frac{10}{27}\right)^2 + \frac{5}{27}\left(\frac{10}{27}\right)^3 - \frac{10}{81}\left(\frac{10}{27}\right)^4 + \ldots$$
$$= 3 + \frac{10}{27} - \frac{1}{3}\left(\frac{10}{27}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{27}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{10}{27}\right)^5 + \ldots$$

Ahora, $\frac{10}{27} = 0.370370\ldots$, $\frac{100}{2187} = 0.069$, $\frac{1}{2}\left(\frac{10}{27}\right)^4$ es menor que pero aproximadamente igual a $\frac{1}{2}\left(\frac{10}{25}\right)^4 = \frac{8}{625} = 0.01$; $\frac{1}{3}\left(\frac{10}{27}\right)^5$ es aproximadamente igual a $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^5$ y, por tanto, a $\frac{1}{625}$. Así, pues, $\sqrt[3]{37} = 3.31$ aproximadamente.

EJERCICIOS

1. Usese la fórmula (35) para calcular π con dos decimales correctos.

2. Usese la fórmula (36) para calcular los tres primeros dígitos de e.

3. Hallar las tres primeras cifras de e usando como definición de e el límite de la sucesión $a_1, a_2 \ldots$ en donde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4. Hallar los logaritmos comunes de los números siguientes, a, con dos decimales empleando las fórmulas (37) y (38) y el valor $2 \log_{10} e = 0.868$.

(a) $a = 2$	(c) $a = 7$	(e) $a = 0.13$
(b) $a = 3$	(d) $a = 11$	(f) $a = 0.17$

5. Calcúlense:

(a) $\sqrt{13}$	(d) $\sqrt[3]{10}$	(g) $\sqrt[4]{68}$
(b) $\sqrt{27}$	(e) $\sqrt[3]{69}$	(h) $\sqrt[5]{2673/10}$
(c) $\sqrt{35}$	(f) $\sqrt[3]{1\,005}$	(i) $\sqrt[6]{6/5}$

14. Coordenadas cartesianas en el plano. Los *números complejos*, así como los números reales negativos, no son magnitudes, pero pueden ser considerados como *magnitudes dirigidas*. Se describirán éstos, en efecto, como los puntos de un plano en la misma forma que se han descrito los números reales como los puntos de una recta.

En un plano se puede construir el diagrama de la figura 7. Este es el diagrama de lo que se llama un *sistema rectangular de coordenadas cartesianas*. Consta de un par de rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto indicado con O, que se llama el *origen*. La recta horizontal (oeste-este) se llama el *eje de las equis* y es una recta real, cuya *dirección positiva es hacia la derecha* y que tiene a O como su punto cero. A la recta vertical (sur-norte) se le llama el *eje de las yes* y es también una recta real, cuya dirección positiva es hacia arriba y que tiene a O como su punto cero.

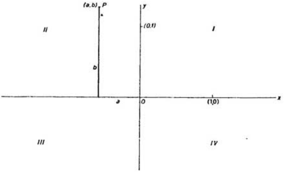

FIG. 7

El punto indicado con (1, 0) es el *punto unitario* y su distancia a O es la unidad usada en *todas* las medidas en el plano. Entonces, $(0, 1)$ está a una distancia de una unidad del origen y sobre el eje de las *yes*.

Se establecerá ahora una correspondencia biunívoca entre los puntos P del plano y las parejas (a, b) de números reales. Si se da P, al primer número, a, se le llama la ***abscisa*** o ***coordenada x*** de P. Esta es la distancia, con su signo respectivo, desde P al eje de las *yes*. En la figura 7, a es un número negativo. El segundo número b se llama la ***ordenada*** o la ***coordenada y*** de P. Esta es la distancia perpendicular del punto P al eje de las equis, con su correspondiente signo. En la figura, b es un número positivo. A los números a, b, se les llama las ***coordenadas*** de P. Siempre que se dé una pareja (a, b), se entenderá que a, y no b, es la coordenada x.

Inversamente, si se dan a y b, el punto P de coordenadas (a, b) queda unívocamente determinado como la intersección de dos rectas. Una es la recta paralela al eje de las yes que corta al eje de las equis en el punto a, y la otra, la paralela al eje de las equis que corta al de las yes en el punto b.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes que se llaman ***cuadrantes***. Se indican éstos con I, II, III y IV en la dirección contraria a las agujas del reloj.

EJERCICIOS ORALES

1. Determinar para cada cuadrante cuáles son los signos de las coordenadas de sus puntos.

2. ¿Cómo pueden describirse los puntos del eje de las equis en términos de sus coordenadas? ¿Los del eje de las yes? ¿Los de la recta que pase por O y por el punto $(1, 1)$? ¿Los de la recta determinada por los puntos O y $(1, -1)$? ¿Los de la recta determinada por $(0, 1)$ y $(2, 1)$? ¿Los de la recta que pase por $(1, 0)$ y $(1, 2)$?

3. Describir una construcción de los siguientes puntos, midiendo las distancias de los ejes de coordenadas, y decir el número del cuadrante en que se encuentran:

(a) $(1, 2)$	*(c)* $(-3, 1)$	*(e)* $(-2, -2)$
(b) $(2, 1)$	*(d)* $(-1, 3)$	*(f)* $\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

15. Números complejos. El conjunto de todos los puntos de un plano viene a ser un sistema numérico cuando se definen para ellos la adición, sustracción, multiplicación y división. Se define

$$(39)\quad \begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b) - (c, d) &= (a - c, b - d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc),\end{aligned}$$

y si (c, d) no es el origen,

$$(40)\qquad \frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Puede, entonces, demostrarse que todas las leyes que se han estudiado para la adición, sustracción, multiplicación y división, así como las leyes para los exponentes enteros valen para el sistema numérico así definido. A este nuevo sistema numérico se le llama *sistema* (o *campo*) *de todos los números complejos.* Este no es un conjunto ordenado.

El punto $(a, 0)$ sobre el eje de las x puede identificarse con el correspondiente número real a, y las fórmulas (39) y (40) muestran que el sistema numérico de estos puntos es un equivalente matemático del sistema de los números reales. Entonces puede decirse que el sistema numérico de los complejos contiene al sistema numérico de los reales. Se acostumbra llamar *eje real* al eje de las equis. Así se escribirá a en lugar de $(a, 0)$.

El número complejo $i = (0, 1)$ tiene la propiedad de que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Los productos

$$bi = (b, 0)(0, 1) = (0, b)$$

y los puntos bi están sobre el eje de las yes. Este eje se llama el *eje imaginario* y los números $bi \neq (0, 0)$ se llaman *números imaginarios puros.*

Todo número complejo (a, b) puede ahora expresarse como una suma

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi,$$

en donde los números reales a y b son las coordenadas de α, unívocamente determinados. Ahora, las definiciones dadas según la fórmula (39) pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned}
&(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,\\
&(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,\\
&\quad (a + bi)(c + di) =\\
&\qquad\qquad ac + dbi^2 + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i,
\end{aligned}$$

y la fórmula (40) para $c + di$ diferente de $(0, 0) = 0$, como

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

De este modo, pueden recordarse fácilmente estas fórmulas mediante la adición, sustracción, multiplicación y división ordinarias de expresiones algebraicas, excepto que se emplea siempre la propiedad $i^2 = -1$ cuando se tiene una potencia de i^n. Por ejemplo, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc.

EJERCICIOS

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$:

(a) $2 + 3i - 3 + 2i$

(b) $(2 + 3i)(2 - 3i)$

(c) $(2 + 3i)(3 - 2i)$

(d) $[(2 + i) - (3 - 2i)](3 - i)$

(e) $\dfrac{1 + 3i}{1 - 3i}$

(f) $\dfrac{18 + i}{3 - 4i}$

(g) $\dfrac{(1 + i)(1 - i)}{1 + 2i}$

(h) $\dfrac{3 + 3i}{(1 + 2i)(1 - 3i)}$

2. Usar la definición $\sqrt{-d} = \sqrt{d}i$ para todos los números reales positivos d para simplificar las expresiones siguientes reduciéndolas a la forma $a + bi$:

(*a*) $1 + 2i - 3\sqrt{-4}$

(*b*) $(1 + \sqrt{-9})(1 - 3i)$

(*c*) $(\sqrt{5} + \sqrt{-5})(\sqrt{5} - \sqrt{-5})$

(*d*) $\dfrac{\sqrt{9} - 3i}{1 + \sqrt{-1}}$

(*e*) $\dfrac{\sqrt{9} + \sqrt{-16}}{\sqrt{16} + \sqrt{-9}}$

(*f*) $\dfrac{\sqrt{-4} + 2i - 1}{\sqrt{-9} + 3i}$

16. Unidades complejas. El número

$$\bar{\alpha} = a - bi$$

(léase $\bar{\alpha}$ como "α conjugado") se llama el *conjugado* del número complejo $\alpha = a + bi$. Si α es también un número real, entonces $b = 0$ y $\bar{\alpha} = \alpha$. Si α no es real, es decir, $b \neq 0$, se dirá que α es un número *imaginario*, y obsérvese que entonces $\bar{\alpha} \neq \alpha$, y que

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2bi \neq 0$$

es un número imaginario puro. Puede probarse que si se reemplaza i por $-i$ en una expresión algebraica λ obtenida a partir de números complejos α, β, etc., mediante adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones, el resultado que se obtiene es $\bar{\lambda}$. En particular,

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta},$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

El número $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ es un número real no negativo y es estrictamente positivo siempre que α es distinto de cero. El número

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$$

es un número real no negativo, que se llama el *valor absoluto* de α y es la distancia desde el origen al punto (a, b). Así se obtiene el diagrama de la figura 8 y puede pensarse en α como una distancia dirigida de longitud $|\alpha|$. El ángulo θ medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj desde el rayo Ox al rayo $O\alpha$ determina, junto con $|\alpha|$, la posición de α y se llama a θ la *amplitud* de α.

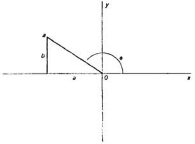

FIG. 8

Se ve ahora que

$$|-\alpha| = |\alpha|, \quad |\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)\,(\overline{\alpha\beta})} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = |\alpha|\,|\beta|$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)} = \sqrt{\frac{\alpha\bar{\alpha}}{\beta\bar{\beta}}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Puede demostrarse que

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|, \qquad \big||\alpha| - |\beta|\big| \leqq |\alpha - \beta|.$$

Si $|\alpha| = 1$, se dice que α es una *unidad compleja.* Todas las unidades complejas están en una circunferencia con centro en O, de radio 1. Además, todo número complejo $\alpha \neq 0$ puede expresarse como

$$\alpha = a + bi = |\alpha| \cdot \left(\frac{a}{|\alpha|} + \frac{b}{|\alpha|}i\right) = |\alpha| \cdot \mu$$

en donde el número complejo μ tiene la propiedad de que

$$|\mu| = \frac{a^2 + b^2}{|\alpha|^2} = 1.$$

Así, pues, todo número complejo es el producto de su valor absoluto y una unidad compleja μ. Ya que $a/|\alpha|$ y $b/|\alpha|$ son proporcionales a a y b, la amplitud θ de α es la misma que la amplitud de μ.

En el artículo 7 del capítulo VIII se obtendrán más propiedades de los números complejos.

EJERCICIOS

1. Hallar el valor absoluto de los siguientes números complejos:

(*a*) $3 + 4i$	(*e*) $(5 + 12i)(1 - 2i)$
(*b*) $1 + i$	(*f*) $\dfrac{(7 + 24i)}{(3 - 4i)}$
(*c*) $\dfrac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}$	(*g*) $\dfrac{(-3 - 4i)(7 - 24i)}{63 - 16i}$
(*d*) $(1 + 2i)(1 - 3i)$	

2. Hallar el valor absoluto y la amplitud (en grados) de cada uno de los siguientes números complejos:

(*a*) $\dfrac{-1 + i}{2}$	(*e*) -34
(*b*) $2 + 2i$	(*f*) $-2 - 2\sqrt{3}i$
(*c*) $-1 + \sqrt{3}i$	(*g*) $-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$
(*d*) $2i$	(*h*) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

17. Campos de números complejos. Un conjunto F de números complejos se llama un *campo* si tiene las siguientes propiedades:

1. *La suma* $\alpha + \beta$ *de dos números arbitrarios* α *y* β *de* F *está en* F.

2. *La diferencia* $\alpha - \beta$ *de dos números arbitrarios* α *y* β *de* F *está en* F.

3. *El producto $\alpha\beta$ de dos números arbitrarios α y β de F está en F.*

4. *Si α y β están en F y β no es cero, entonces el cociente α/β está en F.*

Ejemplos ilustrativos (CURSO COMPLETO)

1. Sea m un entero cualquiera que no tenga ningún cubo por factor y tal que $m > 1$, de manera que m tenga una raíz cúbica positiva $\sqrt[3]{m}$. Demostrar que el conjunto F de todos los números de la forma $a + b\sqrt[3]{m} + c\sqrt[3]{m^2}$, en donde a, b, c son números arbitrarios, es un campo.

Solución

Si $\alpha = a + b\sqrt[3]{m} + c\sqrt[3]{m^2}$ y $\beta = d + e\sqrt[3]{m} + f\sqrt[3]{m^2}$

entonces

$$\alpha + \beta = (a + d) + (b + e)\sqrt[3]{m} + (c + f)\sqrt[3]{m^2}$$

está en F,

$$\alpha - \beta = (a - d) + (b - e)\sqrt[3]{m} + (c - f)\sqrt[3]{m^2}$$

está en F,

$$\alpha\beta = r + s\sqrt[3]{m} + t\sqrt[3]{m^2}$$

está en F, en donde se usó el hecho de que $(\sqrt[3]{m})^3 = m$, $\sqrt[3]{m^2} = (\sqrt[3]{m})^2$ para obtener

$r = ad + bfm + cem$, $\quad s = ae + bd + cfm$, $\quad t = af + cd + be$.

Un número β de F es cero a menos que alguno de los números d, e, f sea distinto de cero. Entonces se usa la fórmula del producto para calcular lo que se llama la norma de β. Esta es el producto.

$$N(\beta) = \gamma\beta, \quad \gamma = (d^2 - mef) + (f^2m - de)\sqrt[3]{m} + (e^2 - df)\sqrt[3]{m^2}$$

y se calcula

$$r = (d^2 - mef)d + (f^2m - de)fm + (e^2 - df)em$$
$$= d^3 + e^3m + f^3m^2 - 3medf,$$
$$s = (d^2 - mef)e + (f^2m - de)d + (e^2 - df)fm = 0,$$
$$t = (d^2 - mef)f + (e^2 - df)d + (f^2m - de)e = 0 \text{ de modo que}$$
$$N(\beta) = d^3 + e^3m + f^3m^2 - 3mdef.$$

Pero entonces, si $N(\beta) \neq 0$, se tiene

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{N(\beta)} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{N(\beta)},$$

y se necesita ya únicamente demostrar que si $\beta \neq 0$, entonces $N(\beta) \neq 0$. Pero si $N(\beta) = 0$ con d, e y f no las tres nulas, entonces se podrá multiplicar siempre por el mínimo común denominador y obtener $d^3 + e^3m + f^3m^2 - 3mdef = 0$ para los enteros d, e, f que no tienen otro factor común a todos ellos que el 1. Si p es un factor primo de m, p divide a d^3 y, por lo tanto, a d, es decir, $d = gp$, y p^3 divide a

$$e^3m + f^3m^2 - 3mdef.$$

Si p^2 no divide a m, entonces p^2 divide a e^3m y ya que p divide a e, p^3 divide a f^3m^2 y p divide a f, lo cual es una contradicción. Análogamente, si m es divisible exactamente por p^2, entonces p^3 divide a e^3m, p divide a e, p^4 divide a d^3, p^2 divide a d, p^5 divide a f^3m^2, y p divide a f, lo cual es contradictorio. Esto prueba que $N(\beta) \neq 0$ si d, e, f no son los tres nulos y también que $\beta \neq 0$ si d, e, f no son los tres nulos. Con esto queda también demostrado que F es un campo.

II. Expresar el cociente

$$\delta = \frac{1 + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{3 - \sqrt[3]{4}}$$

en la forma $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$.

Solución

Se calcula $d = 3$, $e = 0$, $f = -1$, $\gamma = 9 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ y se forma

$$\delta = \frac{(1 + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})(9 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4})}{(3 - \sqrt[3]{4})(9 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4})}$$

$$= \frac{23 + 23\sqrt[3]{2}}{23} = 1 + \sqrt[3]{2}$$

EJERCICIOS ORALES

1. ¿Es el conjunto de todos los números enteros un campo?
2. ¿Es el conjunto de todas las fracciones positivas y negativas un campo?

3. ¿Es el conjunto de todos los números racionales un campo?

4. ¿Es el conjunto de todos los números reales un campo?

EJERCICIOS

1. (CURSO COMPLETO). Demuéstrese que el conjunto F de todos los números de la forma $a + b\sqrt{m}$ es un campo donde $m \neq 0$ es un entero fijo sin factores que sean cuadrados, y a y b son números racionales arbitrarios. SUGERENCIA: Compruébese que

$$\frac{1}{c + d\sqrt{m}} = \frac{c - d\sqrt{m}}{c^2 - d^2m},$$

y muéstrese que $c^2 - d^2m$ es diferente de cero si c y d no son ambos nulos.

2. Expresar los cocientes siguientes en la forma $a + b\sqrt{m}$, en donde a y b son racionales:

(a) $\dfrac{-1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{(1 + \sqrt{2})^4}{(1 - \sqrt{2})^4}$

(b) $\dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ (g) $\dfrac{(\sqrt{6} - 3)(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{8} - 2)(\sqrt{2} + \sqrt{1})}$

(c) $\dfrac{-2 - 3\sqrt{6}}{4 + \sqrt{6}}$ (h) $\dfrac{2\sqrt{6} - 8 + 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$

(d) $\dfrac{1 - \sqrt{6}}{(1 + \sqrt{6})^2}$ (i) $\dfrac{(\sqrt{8} - 1)^2(2\sqrt{6} + \sqrt{3})^4}{(\sqrt{8} + 1)^6 \cdot 9}$

(e) $\dfrac{(3 + \sqrt{5})^2}{2 + \sqrt{5}}$ (j) $\dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}$

3. (CURSO COMPLETO). Expresar los cocientes siguientes en la forma $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ en donde a, b y c son racionales, usando el ejemplo ilustrativo I.

(a) $\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}$ (e) $\dfrac{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$

(b) $\dfrac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt[3]{2}}$ (f) $\dfrac{1 - \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{1 - 2\sqrt[3]{2}}$

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + 1}$ (g) $\dfrac{5 - 4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}{1 + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}$ (h) $\dfrac{3 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{-1 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$

18. Operaciones racionales. Una expresión algebraica cualquiera en la cual figuren solamente las operaciones enteras de sumas, restas y multiplicaciones de cantidades se llama una *función entera* o un *polinomio* en dichas cantidades. Tales expresiones se resuelven siempre de acuerdo con las diez leyes para las operaciones enteras. Una expresión en la cual las operaciones indicadas sean las *operaciones racionales* de suma, resta, multiplicación y división de cantidades, con denominadores siempre diferentes de cero, se llama una *función racional* de sus cantidades, y siempre se supondrá que son válidas las leyes para las operaciones racionales. Se podrán usar siempre, para simplificar funciones racionales, las once leyes, las leyes para exponentes y las fórmulas (3) a (11) para operaciones racionales que se enunciaron al principio de este capítulo como propiedades de los números racionales. Así, pues, toda función racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Se procederá ahora a estudiar las funciones racionales.

CAPITULO IV

POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES

1. Polinomios en x. Un polinomio en x es una expresión algebraica formal

$$(1) \qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

(léase "f de x igual a a cero x a la n-ésima, más a uno x a la $n - 1$, más, etc., más a sub n"). Es una suma formal de $n + 1$ términos, siendo el primero a_0x^n. El símbolo n representa un entero que es positivo o cero. El término a_ix^{n-i} se llama *término general* del polinomio y es el término $(i + 1)$. El último término a_n se llama *término constante* de $f(x)$ y ajusta la fórmula para el término general si se acuerda identificar x^0 con 1, a_n con a_nx^0.

Los símbolos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman *coeficientes* de $f(x)$. Representan números complejos ordinarios no especificados, y se les llamará *constantes*. En cualquier problema particular se especificarán.

Cuando los coeficientes de un polinomio son todos cero, se le llama *polinomio cero*. Se conviene en que todos estos polinomios son iguales y se identifican con el número cero. Por ejemplo,

$$0x^2 + 0x + 0 = 0x + 0 = 0$$

Si un coeficiente a_i de un polinomio $f(x)$ es cero, el término correspondiente a $a_ix^{n-i} = 0x^{n-i}$ normalmente se omite. Se conviene en identificar todos los polinomios que difieren solamente en la presencia o ausencia de términos con coeficientes cero. Por ejemplo,

$$f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7x - 2 = 3x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 7x - 2 = 0x^7 + 0x^6 + 3x^5 + 5x^3 + 0x^2 + 7x - 2.$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios arbitrarios, se pueden agregar, de ser necesario, términos con coeficientes cero a uno de ellos y escribir entonces ambos polinomios como en la fórmula (1) y con la *misma n*. Por ejemplo, si

$$f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7x - 2$$

y

$$g(x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x - 1,$$

se puede escribir

$$f(x) = 3x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 7x - 2,$$
$$g(x) = 0x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 2x - 1.$$

Entonces se conviene en que, por definición, *dos polinomios* f(x) *y* g(x) *son iguales si los coeficientes correspondientes son números iguales.*

Si $f(x)$ no es el polinomio cero, tiene por lo menos un coeficiente distinto de cero. Se pueden entonces borrar sucesivamente aquellos términos primeros que tengan coeficiente cero hasta llegar a un nuevo término primero con coeficiente distinto de cero. Esto permite escribir cualquier polinomio como en la fórmula (1) con $a_0 \neq 0$. Cuando es así, se dice que a_0 es el *coeficiente inicial* de $f(x)$ y n es el *grado* de $f(x)$. Por ejemplo, $0x^5 + 0x^4 + 4x^3 - 2x - 1$ es de grado 3, y no de grado 5, y el coeficiente inicial es 4.

Un polinomio como el de la fórmula (1) con $n = 0$ se reduce a su primero (y último) término $a_0x^n = a_0 = a_n$. Se le llama un polinomio *constante*. Se le da el grado *cero* aun en el caso que sea el polinomio cero. Se hará referencia algunas veces a los polinomios de grado $n > 0$ como a polinomios *no constantes.*

Un polinomio de grado $n = 1, 2, 3, 4$, se puede también llamar polinomio *lineal, cuadrático, cúbico* y *cuártico* respectivamente.

Si el símbolo x se reemplaza por un número complejo c, cada vez que x aparece en un polinomio $f(x)$, el resultado es un número que se acostumbra denotar con $f(c)$. Se dirá que $f(c)$ es el resultado de sustituir x por c en $f(x)$. Por ejemplo, si

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x - 4,$$

entonces

$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 6(1) - 4 = -11,$$

$$f(2) = 3(2)^4 - 4(2)^3 - 6(2) - 4 = 48 - 32 - 12 - 4 = 0.$$

Los números $f(c)$ se llaman los *valores* de $f(x)$. Se dice también que $f(c)$ es el *valor de* $f(x)$ *para* $x = c$. Resulta claro que si $f(x) = g(x)$ entonces $f(c) = g(c)$ para todo número complejo c.

Los valores $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ se calculan con mucha frecuencia y es útil observar que mientras $f(0)$ es el ***término constante*** a_n de $f(x)$, $f(1)$ es la suma de los coeficientes de $f(x)$, y $f(-1)$ es la suma de los coeficientes de todas las potencias pares de x menos la suma de los coeficientes de todas las potencias impares de x.

EJERCICIOS ORALES

1. Hallar el grado n y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de los siguientes polinomios:

(*a*) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 1$
(*b*) $f(x) = 3x^5 - x^3 + x$
(*c*) $f(x) = 6x^3 - 8x^2 + 9x - 7 + x^4$
(*d*) $f(x) = -5x^5 + 1$
(*e*) $f(x) = x^2 + 0x^4$
(*f*) $f(x) = -x^{10} + x^5 + 1$

2. Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ para los polinomios del ejercicio 1.

3. De los polinomios (a) — (e) del ejercicio 1, cuáles son *lineales*, *cuadráticos*, *cúbicos*, etc.

4. Leer los primeros cinco términos de $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

5. Leer los cuatro últimos términos del ejercicio 4.

6. ¿Qué suposiciones acerca del grado n deben hacerse para que tengan sentido los ejercicios 4 y 5?

2. Sumas, diferencias y productos. Los polinomios se suman sumando los coeficientes correspondientes y se restan restando los coeficientes correspondientes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(3x^5 - 4x^2 + 2x + 1) &+ (-2x^4 + 5x^3 + 3x - 2)\\ &= (3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 2x + 1)\\ &+ (0x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 3x - 2)\\ &= 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1.\end{aligned}$$

Si n es el mayor de los grados de dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se puede escribir

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

y

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Si tienen grado distinto, uno de los coeficientes a_0 y b_0 es cero. Cuando se han escrito así, se tiene

$$(2) \quad f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n).$$

Este es un polinomio cuyo grado *no es mayor* que n. El resultado obtenido puede extenderse a sumas de varios polinomios y enunciarse como sigue:

Teorema 1. *El grado de una suma de polinomios no es mayor que el mayor de los grados de todos los polinomios que se suman.*

El producto de $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ de grado n y $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ de grado m es la suma de todos los productos $(a_ix^{n-i})(b_jx^{m-j}) = (a_ib_j)x^{n+m-i-j}$. Todos los términos con el mismo exponente para x se combinan sumando sus coeficientes. Si $f(x)$ o $g(x)$ es el polinomio cero, su producto es cero. En caso contrario $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y $f(x)g(x)$ tiene precisamente un término de grado $n+m$, a saber, $a_0b_0x^{n+m}$. Este es el término de máximo grado y resulta que el grado de $f(x)g(x)$ es $n+m$.

Este resultado vale para los productos de varios polinomios. Los polinomios que se multiplican se llaman *factores* y se enuncia el resultado como sigue:

Teorema 2. *El grado de un producto de polinomios distintos de cero es igual a la suma de los grados de sus factores. El coeficiente inicial de cualquier producto es igual al producto de los coeficientes iniciales de los factores, y el término constante de un producto es igual al producto de los términos constantes de sus factores.*

Este resultado tiene como consecuencia simple:

Teorema 3. *El producto de polinomios distintos de cero es distinto de cero y es una constante si y sólo si todos sus factores son constantes.*

En efecto, el grado de un producto es la suma de los grados. Estos grados son todos números naturales y su suma puede ser cero únicamente cuando los grados que se sumen sean cero todos, es decir, los factores son constantes.

El producto de un polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ por un polinomio constante b es

$$ba_0x^n + ba_1x^{n-1} + \ldots + ba_n.$$

En particular,

$(-1)f(x) = -f(x) = (-a_0x^n) + (-a_1x^{n-1}) + \ldots + (-a_n)$ y cualquier diferencia $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$. Además, el teorema 1 es válido no solamente para sumas sino también para diferencias. En realidad vale para sumas de múltiples constantes de polinomios.

Se puede ahora establecer que cualquier expresión algebraica obtenida mediante la aplicación a x y a las constantes, de un número finito de operaciones enteras de adición, sustracción y multiplicación es un polinomio en x. También se dan las definiciones de suma y multiplicación de polinomios de manera que se satisfacen las leyes para las operaciones enteras y para los exponentes enteros no negativos. Entonces resultará cierto que si se sustituye x por cualquier número en dos expresiones formalmente distintas del mismo polinomio, los números resultantes serán un mismo número. Por ejemplo, se tiene la igualdad polinomial

$$(3)\quad (3x-2)^2(x+1) - x(2x+1)(2x-1) - 5(x+1)x^2 = -8x^2 - 7x + 4.$$

Entonces se establece que, en particular,

$$(3\cdot 1 - 2)^2(1+1) - 1(2\cdot 1 + 1)(2\cdot 1 - 1) - 5(1+1)(1)^2 = -8(1)^2 - 7(1) + 4.$$

EJERCICIOS ORALES

1. Hallar el grado n y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en los polinomios siguientes:

(a) $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (-2x^3 + 2x^2 + 2x + 3)$
(b) $3(2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) - (8x^5 + 11x^4 + 2) + 2(x^5 + x + 2)$
(c) $1 + 2x + 3x^2 - 4x^4 + 2 - x - 3x^3 - 3 + 2x^4$
(d) $2(2x^3 - 3x + 1) - 3(x^3 + 2x^2 + x) - (x^3 - 9x) + 2(3x^2 - 1)$.

2. Hallar el grado, el coeficiente inicial y el término constante a_n de los polinomios $f(x)$ siguientes (úsese el teorema 2 y que $f(0) = a_n$):

(a) $(3x^5 - 4x^2 + 1)(2x - 1) + (x + 3)^3$
(b) $(x^3 - 1)^5(2x^3 - 3)(x^3)(x + 1)^3$
(c) $(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x^4 + 2)(2x - 1) + (x^3 + x)(2x^2 - 1)(x^3 + 2)x^2$
(d) $x^6(x - 1)x^3(x + 1)(x + 2) - x^4(x^2 + 1)(x^5 + 1) + (x^4 - 1)^3$
(e) $(3x^4 - 1) + (3x^2 - 1)(x^2 + 2) - (2x^4 - 3) - 2x^4$

3. Cálculo de polinomios. Cuando es necesario calcular varios polinomios, resulta que ciertos tipos de expresiones figuran con tanta frecuencia que se justifica el desarrollo de fórmulas para el cálculo. Algunas de estas fórmulas son:

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad (x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\
(x+y)(x-y) &= x^2-y^2.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, al calcular

$$
f(x) = (3x-2)^2(x+1) - x(2x+1)(2x-1) - 5(x+1)x^2
$$

usando las fórmulas mencionadas se tiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (9x^2-12x+4)(x+1) - x(4x^2-1)\\
&\quad -5(x^3+x^2) = 9x^3-12x^2+4x+9x^2-12x+4\\
&\quad -4x^3+x-5x^3-5x^2 = -8x^2-7x+4.
\end{aligned}
$$

Hay un procedimiento ligeramente distinto del que se acaba de usar para calcular polinomios. Difiere principalmente en la forma de seleccionar y ordenar los términos. Es un método valioso para ahorrar lugar y tiempo y el estudiante encontrará bien empleado el tiempo que haya usado en adiestrarse en él.

A este procedimiento se le puede llamar procedimiento del *exponente fijo*. Se selecciona un exponente fijo i y se calculan todos los coeficientes de la potencia x^i que hay en los términos cuya suma es $f(x)$. Entonces la suma de estos coeficientes es el coeficiente de x^i en $f(x)$. El procedimiento empieza con la determinación del coeficiente de la potencia máxima de x que aparece en todos los términos de $f(x)$. Este coeficiente será el coeficiente inicial de $f(x)$ a menos que sea cero. El procedimiento termina con el cálculo de $a_n = f(0)$. Los detalles del proceso se aclaran en los ejemplos que siguen.

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular $f(x) = (3x - 2)^2(x + 1) - x(2x + 1)(2x - 1) - 5(x + 1)x^2$.

Observaciones: Se escribe primero

$$f(x) = (9x^2 - 12x + 4)(x + 1) - x(4x^2 - 1) - 5x^3 - 5x^2.$$

El exponente máximo es tres y los términos en x^3 son los términos iniciales de los productos. Los términos en x^2 son productos de x por x y de x^2 por constantes. Los términos en x son productos de x por constantes.

Solución

El coeficiente de x^3 es $9 - 4 - 5 = 0$, el de x^2 es $9 - 12 - 5 = -8$ y el de x es $(-12 + 4) + 1 = -7$. También $f(0) = 4$. Por consiguiente,

$$f(x) = -8x^2 - 7x + 4.$$

II. Calcular el coeficiente de x^2 en el polinomio

$$(2x^2 - 1)(x + 2) + (2x + 1)(x^2 - 2x - 2) + 2(3x - 1)(x + 1) - 3(x - 1)^2.$$

Solución

El coeficiente es $(2)(2) + 1 + 2(-2) + (2)(3) - 3 = 4$.

III. Simplificar la expresión

$$f(x) = \frac{6(x - 3)(3x + 1) + 8(3x + 1)^2}{10}.$$

Solución

En el numerador, el coeficiente de x^2 es

$$(6)(3) + (8)(9) = 18 + 72 = 90,$$

el de x es $6(1 - 9) + (8)(6) = 0$, y el término constante es

$$6(-3) + 8 = -10.$$

Por consiguiente, $f(x) = 9x^2 - 1$.

EJERCICIOS

1. Usar el procedimiento del exponente fijo para calcular los coeficientes de los siguientes polinomios:

(a) $f(x) = (3x^2 - 4)(x + 1) - (2x + 1)(x - 2)$
(b) $f(x) = 2x(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$

(c) $f(x) = (2x + 3)(2x - 3)x - (2x^2 + 2x + 1)(x - 1)$
(d) $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)(x^2 - 2x - 2) - x^2(2x - 1)$
(e) $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2x + 1) + (x + 1)(x^2 + 2)$
(f) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 1) - 2(2x^2 - 1)(x - 1) + 3x^2(x - 2)$

2. Calcular los coeficientes de x^2 y x en los polinomios siguientes:
(a) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x) - x(x + 1)(2x) - x(x + 1)$
(b) $x(x + 1)^2 - (x^2 + 1)(2x - 2) + (x + 1)^2$
(c) $x^2(x + 1)(x - 1) - (2x + 1)(2x - 1) + 2(x^2 + 1)(x)$
(d) $2(x + 1)^2x - x(2x + 3)(2x - 3) + (x^2 + 1)x$

3. Calcular el coeficiente de x en las siguientes expresiones:
(a) $3(x - my)^2 + 2(x - my)(mx + y) - 4(mx + y)^2$
(b) $(x - my)^2 + 6(x - my)(mx + y) - 9(mx + y)^2$
(c) $-2(x - my)^2 + (x - my)(mx + y) - 3(mx + y)^2$

4. El algoritmo de la división. El algoritmo de la división para los números enteros tiene un análogo para polinomios que se enuncia como sigue:

EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS. *Sean* f(x) *y* g(x) *dos polinomios tales que* g(x) *no es una constante. Entonces existen polinomios únicos* q(x) *y* r(x) *tales que el grado de* r(x) *es menor que el de* g(x) *y*

(5) $$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x).$$

Cuando el grado de f(x) *es menor que el de* g(x), *el polinomio* q(x) = 0 *y* f(x) = r(x). *Por otra parte, el grado de* q(x) *es igual al de* f(x) *menos el de* g(x).

Del enunciado del algoritmo resulta claro que solamente se necesita probar la existencia de $q(x)$ y $r(x)$ en el caso en que

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$
$$a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad n \geqq m > 0.$$

Entonces el llamado *procedimiento de la división* empieza con la sustracción

$$f(x) - a_0x^{n-m}b_0^{-1}g(x).$$

Esto elimina el término a_0x^n obteniendo un polinomio de grado a lo sumo igual a $n-1$. Un número finito de tales sustracciones de múltiplos de $g(x)$ reduce el grado de la última diferencia $r(x)$ a un valor menor que el grado de $g(x)$. Entonces se tiene la igualdad (5), en donde $q(x)$ empieza con $a_0b_0^{-1}x^{n-m}$ y tiene el grado que se afirma en el algoritmo.

Para demostrar que $q(x)$ y $r(x)$ son únicos, supóngase que $f(x) = s(x) \cdot g(x) + t(x)$, donde el grado de $t(x)$ es menor que m. Entonces por el teorema 1, el grado de

$$r(x) - t(x) = [s(x) - q(x)]g(x)$$

es menor que m. Esto, según el teorema 2, es imposible, a menos que $s(x) - q(x) = 0$, en virtud de que $g(x)$ es de grado m. Por consiguiente,

$$s(x) = q(x),$$
$$r(x) - t(x) = 0, \; r(x) = t(x).$$

Nótese que si c es un número cualquiera y $g(x) = x - c$ entonces el polinomio residual $r(x)$ es de grado 0, es decir, una constante r:

$$f(x) = q(x) \cdot (x - c) + r. \tag{6}$$

Si $g(x)$ es un polinomio de segundo grado $x^2 + ax + b$, entonces el residuo $r(x)$ es un polinomio lineal:

$$f(x) = q(x)(x^2 + ax + b) + cx + d \tag{7}$$

con c y d constantes.

El estudiante ya habrá practicado el procedimiento de la división en el álgebra elemental. Si necesita ejercitar más, los ejercicios del artículo 7 referentes al procedimiento del m.c.d. serán útiles al efecto.

5. Reducibilidad de polinomios. Un polinomio $f(x)$ es *divisible* por un polinomio $g(x)$ si $f(x) = g(x)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio. Cuando $g(x)$ es un polinomio no constante, esto ocurre solamente en caso de que el residuo $r(x)$ del algoritmo de la división sea el polinomio cero.

La igualdad $f(x) = g(x)q(x)$ se llama una *factorización* o *descomposición en factores* de $f(x)$ en los factores (o divisores) $g(x)$ y $q(x)$. Todo polinomio tiene *descomposiciones en factores* o *factorizaciones triviales*.

$$f(x) = a[a^{-1}f(x)] \tag{8}$$

para cualquier número $a \neq 0$. Por tanto, todo polinomio tiene a todas las constantes distintas de cero y a todos los múltiplos constantes distintos de cero como *factores triviales*.

Si un polinomio no tiene más factorizaciones que las triviales se dice que es un polinomio *irreducible* (o *primo*). Todos los polinomios lineales son irreducibles. Si un polinomio tiene factorizaciones no triviales, se dice que es un polinomio *reducible*. Por ejemplo,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

es reducible. El polinomio

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

es también reducible si se permite el uso de coeficientes irracionales. Sin embargo, si se consideran únicamente coeficientes racionales, este polinomio es irreducible. En efecto, si no lo fuera, usando el resultado acerca de los coeficientes iniciales (teorema 2) se tendría que

$$x^2 - 2 = (x - a)(x - b)$$

con a, b racionales. Entonces,

$$a^2 - 2 = (a - a)(a - b) = 0$$

de donde $a^2 = 2$. Esto ya se ha demostrado que no es posible.

Ahora ya resulta claro que las cuestiones de reducibilidad e irreducibilidad de un polinomio dependen de la naturaleza de los coeficientes que puedan usarse. Se supondrá en el resto de este capítulo que los coeficientes se tomarán de algún campo fijo F de números complejos. Los casos más importantes serán aquellos en que F es el campo de todos los números racionales o el campo de todos los números reales o bien el de todos los números complejos. Se obtendrán resultados válidos para todos los casos.

6. Teoremas de factorización. Un polinomio reducible $f(x)$ tiene grado $n > 1$ y una factorización no trivial

$$f(x) = g(x)q(x).$$

Ninguno de los dos factores no triviales $g(x)$ y $q(x)$ es una constante y el grado $f(x)$ es la suma de los grados de estos factores. Puede enunciarse esto como sigue:

Lema 1. *El grado de un factor no trivial de* $f(x)$ *es menor que el grado de* $f(x)$.

Si $f(x) = g(x)q(x)$ y $g(x) = h(x)s(x)$ son factorizaciones no triviales, entonces $f(x) = h(x)s(x)q(x)$ es una factorización no trivial en tres factores. El lema 1 implica una disminución de los grados. Este proceso debe forzosamente terminar y puede acabarse solamente cuando todos los factores que se obtengan sean irreducibles. De aquí se obtiene el primero de los teoremas de factorización.

Teorema 4. *Todo polinomio reducible es un producto*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_t(x)$$

de un número finito de polinomios irreducibles.

Por el teorema 2, el coeficiente inicial de $f(x)$ es el producto de los coeficientes iniciales de sus factores. Se pueden sacar estos coeficientes obteniendo el

Teorema 5. *Todo polinomio reducible es un producto*

$$f(x) = a_0 p_1(x)p_2(x)\dots p_t(x) \tag{9}$$

de su coeficiente inicial a_0 ***y un número finito*** t ***de polinomios irreducibles*** $p_i(x)$ ***cada uno de los cuales tiene coeficiente inicial igual a uno.***

Se demostrará más adelante que *esencialmente sólo hay una factorización* como la de la fórmula (9). Desde luego, el orden de los factores no es único. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+1)(x-1)(x-3)\\ = (x-3)(x-2)(x+1)(x-1)(x-1).\end{aligned}$$

Sin embargo, tanto los polinomios irreducibles $p_i(x)$ con coeficiente inicial uno como el número de veces que aparecen en la fórmula (9) son únicos.

Si un polinomio irreducible $p(x)$ aparece exactamente e veces como factor de $f(x)$ en la fórmula (9), pueden agruparse juntos estos factores y escribir su producto como $p(x)^e$. Entonces $p(x)^e$ divide a $f(x)$, y $p(x)^{e+1}$ no lo divide. Se dice que e es la ***multiplicidad*** del factor irreducible $p(x)$ de $f(x)$.

EJERCICIOS

1. En los polinomios siguientes los factores irreducibles son lineales. Escríbanse estos polinomios como productos de constantes por potencias de factores lineales distintos con coeficiente inicial uno y dígase cuál es la multiplicidad de cada factor.

(a) $(x-1)(x^2-3x+2)(x^2-x-2)(x+2)^4$
(b) $(x-1)^2(x+1)^3(x-1)(x-2)^4$
(c) $(2x+1)^2(3x+1)(2x+1)(4x^2-1)$
(d) $x(x+1)^3x^2(x^2-1)^3(x^3+x^2)$
(e) $(x^4-3x^3+2x^2)(x^4-x^2)(x^2-2x)$
(f) $(x+1)^3(x-1)^2(x^2-1)^4(x^2-9)^3(x^2+4x+3)^2$
$(x^2-2x-3)(2x^2+4x-6)^5$

2. En los polinomios que siguen, los factores, tal como están escritos, son potencias de polinomios irreducibles en el campo de los números racionales. Dígase cuál es la multiplicidad de cada uno de los factores con coeficiente inicial uno.

(a) $(x^2+1)^3(x-1)^2(2x^2+2)(x+1)$
(b) $x^3(x^2-2x-2)^4(2x^2-4)^3x$
(c) $(x^5+2)(x^3+2)(x^2+2)$

(d) $(x^2-2)^3(x^3-2)^2(2x^3-4)^3$
(e) $(3x-6)^2(x-1)^4(x-2)^3$
(f) $(2x^2+4)(x^2+2)(4x^2+8)^5$

7. El proceso euclidiano del m.c.d. (CURSO COMPLETO). Un *divisor común* de dos o más polinomios es un polinomio factor de todos ellos. El m.c.d. de varios polinomios, no todos nulos, es el divisor común de mayor grado y de coeficiente inicial uno. Puede verse que este polinomio es único.

El m.c.d. de dos polinomios $f(x)$ y $g(x) \neq 0$ puede calcularse por un procedimiento polinomial análogo al del artículo 7 del capítulo II. Primero se probará el siguiente:

Lema 2. *Si* $\mathrm{g(x)} \neq 0$ *es un divisor de* $\mathrm{f(x)}$, *entonces el m.c.d. de* $\mathrm{f(x)}$ *y* $\mathrm{g(x)}$ *es un múltiplo constante de* $\mathrm{g(x)}$.

En efecto, todo divisor común de $f(x)$ y $g(x)$ divide a $g(x)$; por tanto, el grado de su m.c.d. no es mayor que el de $g(x)$. Pero $g(x)$ es un divisor común de $f(x)$ y $g(x)$ y tiene el grado máximo posible.

Lema 3. *Sean* $\mathrm{g(x)} \neq 0$, *y* a, b *dos constantes cualesquiera no nulas,* $\mathrm{f(x)} = \mathrm{q(x)g(x)} + \mathrm{r(x)}$. *Entonces los divisores comunes de* $\mathrm{f(x)}$ *y* $\mathrm{g(x)}$ *coinciden con los divisores comunes de* $\mathrm{ag(x)}$ *y* $\mathrm{br(x)}$. *Por consiguiente, el m.c.d. de* $\mathrm{f(x)}$ *y* $\mathrm{g(x)}$ *es el mismo que el de* $\mathrm{ag(x)}$ *y* $\mathrm{br(x)}$.

Efectivamente, si $c(x)$ divide a $ag(x)$ y a $br(x)$, divide a

$$f(x) = q(x)g(x) + b^{-1}br(x)$$

y a $ag(x)$. Inversamente, si $c(x)$ divide a $f(x)$ y a $g(x)$, también divide a $ag(x)$ y a $br(x) = b[f(x) - q(x)g(x)]$.

Los lemas 2 y 3 se usan en un procedimiento para el cálculo del m.c.d. $d(x)$ de $f(x)$ y $g(x) \neq 0$. Si $g(x)$ divide a $f(x)$, el producto de $g(x)$ por el inverso de su coeficiente inicial es $d(x)$. En caso contrario, se usa el algoritmo de la división para encontrar el polinomio $r(x)$ del lema 3. (Las constantes a y b se usan para evitar fracciones en los casos en que se estudian polinomios con coeficientes enteros.) Si $r(x)$ divide a $g(x)$, $d(x)$ es el producto de $g(x)$ y una constante. Si no es así, se divide $g(x)$ por $r(x)$ y se obtiene un nuevo residuo de grado menor. El proceso termina con un último residuo no nulo que es, excepto por un factor constante, el m.c.d. buscado.

Sean $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_t(x)$ polinomios arbitrarios diferentes de cero y $d_i(x)$ el m.c.d. de $f_1(x), \ldots, f_i(x)$. Entonces puede demostrarse que el m.c.d. $d_{i+1}(x)$ de $f_1(x), \ldots, f_i(x)$, $f_{i+1}(x)$ es el m.c.d. de $d_i(x)$ y $f_{i+1}(x)$. Así pues, el algoritmo de la división puede ser utilizado para hallar el m.c.d. de cualquier número t de polinomios.

En el caso menos frecuente en que se dan polinomios en forma factorizada, su m.c.d. se calcula por el procedimiento ordinario. En efecto, éste es el producto de todos los polinomios primos que se encuentran en las diversas factorizaciones, pero con exponentes iguales al menor de los que aparecen en cada una de las descomposiciones en irreducibles. Así, si

$$f_1(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x^2+1)(2x-4)^4,$$
$$f_2(x) = (x-1)^5(x+1)^3(2x-4)^3,$$
$$f_3(x) = (2x-4)^3(x-1)^4(x^2+1)^7(x+1)^2,$$

entonces el exponente menor de $x-1$ es 3, el menor de $(x+1)^2$ es 2, el de x^2+1 es 0 y el menor exponente de $x-2$ es 3. Por consiguiente, el m.c.d. es $(x-1)^3(x+1)^2$ $(x-2)^3$. Este procedimiento es relativamente de poco uso y no se insistirá en él. El m.c.m. de dos polinomios distintos de cero $f(x)$ y $g(x)$ es el polinomio $M(x)$ con coeficiente inicial uno que es divisible por $f(x)$ y $g(x)$ y cuyo grado es el menor de todos los grados de aquellos polinomios no nulos divisibles por $f(x)$ y $g(x)$. Puede demostrarse que si a_0, b_0 son los coeficientes iniciales respectivos de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente y si $d(x)$ es su m.c.d., entonces

$$\frac{f(x)g(x)}{a_0b_0d(x)}$$

es su m.c.m. $M(x)$. El m.c.m. de un conjunto de polinomios $f_1(x), \ldots, f_t(x)$ puede calcularse usando la propiedad de que si $M_i(x)$ es el m.c.m. de $f_1(x), \ldots, f_i(x)$ entonces el m.c.m. de $f_1(x), \ldots, f_{i+1}(x)$ es igual al m.c.m. de $M_i(x)$ y $f_{i+1}(x)$. El cálculo del m.c.m. no es particularmente importante y solamente se ilustrará más adelante.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar el m.c.d. de $x^4 - 2x^3 - 2x - 1$ y $x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$.

Solución

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & x & x - 2 & x + 2 \\
\hline
x^2 + 1 & x^3 + x & x^4 - 2x^3 \qquad - 2x - 1 & x^5 \qquad - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2 \\
 & x^3 + x & x^4 \qquad + x^2 & x^5 - 2x^4 \qquad - 2x^2 - x \\
\cline{2-4}
 & 0 & -2x^3 - x^2 - 2x & 2x^4 - 2x^3 \qquad - 2x - 2 \\
 & & -2x^3 \qquad - 2x & 2x^4 - 4x^3 \qquad - 4x - 2 \\
\cline{3-4}
 & & \qquad -x^2 \qquad - 1 & 2x^3 \qquad + 2x
\end{array}
$$

Por tanto, el m.c.d. es $x^2 + 1$. Nótese que ya que x no es factor de

$$g \doteq x^4 - 2x^3 - 2x - 1,$$

el m.c.d. de g y $x^3 + x$ es el mismo que el m.c.d. de g y $x^2 + 1$. De esta manera puede ahorrarse un paso en el proceso. Sin embargo, esto se sigue sólo cuando se tenga ya la teoría de la factorización del artículo 9.

II. Hallar el m.c.d. de $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x^3 - 3x + 2$, $x^3 + x - 2$.

Observación: Parece lo más simple calcular el m.c.d. de $x^3 - 3x + 2$ y $x^3 + x - 2$ y después el m.c.d. de este resultado y de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Solución

$$
\begin{array}{r|l|r|l|l}
 & x^2 + 3x + 2 & & x^2 + x + 2 & 1 \\
\hline
x - 1 & x^3 + 2x^2 - x - 2 & x - 1 & x^3 \qquad + x - 2 & x^3 - 3x + 2 \\
 & x^3 - x^2 & & x^3 - x^2 & x^3 + x - 2 \\
\cline{5-5}
 & \quad 3x^2 - x & & \quad x^2 + x & \quad -4x + 4 \\
 & \quad 3x^2 - 3x & & \quad x^2 - x & \\
 & \qquad 2x - 2 & & \qquad 2x - 2 & \\
 & \qquad 2x - 2 & & \qquad 2x - 2 & \\
 & \qquad 0 & & \qquad 0 &
\end{array}
$$

Resp.: m.c.d. $= x - 1$.

III. Hallar el m.c.m. de los polinomios del ejemplo ilustrativo II.

Solución

$$f_1 = x^3 + x - 2 = (x^2 + x + 2)(x - 1),$$
$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x - 1),$$

de modo que $M_1 = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2)(x - 1)$. Ahora,

$$f_3 = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$$
$$= (x + 1)(x + 2)(x - 1),$$
$$M_1 = (x^2 + x + 2)(x + 2)(x - 1)^2$$

y, usando esta forma factorizada o bien el proceso del m.c.d., se encuentra que el m.c.d. de M_1 y f_3 es $(x + 2)(x - 1)$. Entonces

$$M = (x^2 + x + 2)(x + 2)(x - 1)^2(x + 1).$$

EJERCICIOS

1. Hallar el m.c.d. de cada una de las siguientes parejas de polinomios:

(*a*) $x^3 - 3x^2 + 4$
$x^3 - 2x^2 - x + 2$

(*b*) $x^3 - x^2 + 2$
$x^3 - x^2 + x - 1$

(*c*) $x^4 - 3x^2 + 2$
$x^4 - x^2 - 2$

(*d*) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$
$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

(*e*) $x^4 + 4x^2 + 1$
$x^4 - 4x^2 + 8x - 7$

(*f*) $x^4 + x + 2$
$x^4 - x^2 - 1$
Resp.: 1.

(*g*) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
$x^3 + x^2 - 4x - 4$
Resp.: $x^2 + 3x + 2$.

(*h*) $x^8 - 2x^6 + x^5 + 2x^2 - x - 1$
$x^8 + x^5 + x^4 - x - 2$
Resp.: $x^4 - 1$.

(*i*) $x^3 - 2x + 4$
$x^6 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x + 2$
Resp.: $x^2 - 2x + 2$.

(*j*) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$
$x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1$
Resp.: 1.

2. Hallar el m.c.d. de cada uno de los siguientes conjuntos de polinomios:

(*a*) $x^4 - 1$
$x^3 + 2x^2 - x - 2$
$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
Resp.: $x - 1$.

(*b*) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$
$x^4 - 7x^2 + 6x$
$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$
Resp.: $x - 1$.

(c) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$x^3 - 2x^2 - 3x$

Resp.: 1.

(d) $x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 6x - 3$
$x^3 + x^2 + 3x + 3$
$x^4 + x^3 - x - 1$

Resp.: $x + 1$.

(e) $x^6 - 11x^2 - 9x - 2$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
$x^{11} - 2x^8 - 121x^3 - 198x^2 - 100x - 24$

(f) $x^8 + x^7 - 3x^5 - 4x^4 + x^3 + 3x - 3$
$x^5 - x^4 + x^2 - 2x + 2$
$x^8 + 2x^7 - 3x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 3x + 6$

(g) $x^9 + 6x^3 + 20$
$x^6 - 3x^3 - 10$
$x^6 - 2x^4 - x^3 - 4x - 6$

(h) $x^9 - x^8 - 3x^7 + 3x^6 - x^5 + 4x^4 - 5x^2 + 4x - 2$
$x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 3$
$x^3 - 2x + 1$

8. Combinaciones lineales (CURSO COMPLETO). Una *combinación lineal* de dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ es una expresión

$$a(x)f(x) + b(x)g(x),$$

en la que $a(x)$ y $b(x)$ son también polinomios en x. Entonces se tiene el siguiente:

Lema 4. *Sean* $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ *combinaciones lineales de* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{g}(\mathrm{x})$. *Entonces toda combinación lineal de* $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ *es también una combinación lineal de* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{g}(\mathrm{x})$.

En efecto, supóngase que $u = af + bg$, $v = cf + dg$, en donde todas las letras representan polinomios en x. Entonces $su + tv = saf + sbg + tcf + tdg = (sa + tc)f + (sb + td)g$ es una combinación lineal de f y g.

Usando este resultado se prueba el siguiente:

Teorema 6. *El m.c.d. de dos polinomios distintos de cero* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ *es su único divisor común de la forma*

$$\mathrm{d}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(\mathrm{x})\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{b}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x}), \tag{10}$$

que tenga coeficiente inicial uno.

En efecto, el primer paso en el proceso del m.c.d. expresa a $f(x)$ en forma $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$. Entonces se tiene

$$g(x) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x)$$

y

$$r(x) = 1 \cdot f(x) + [-q(x)]g(x)$$

es decir, $g(x)$ y $r(x)$ son combinaciones lineales de $f(x)$ y $g(x)$. Cada paso en dicho proceso empezará con un polinomio dividendo y uno divisor que son combinaciones lineales de $f(x)$ y $g(x)$, y resulta un residuo que también es combinación lineal de $f(x)$ y $g(x)$. Entonces, $d(x)$, que es, excepto por un factor constante, igual al último residuo, es de la forma (10). Todo divisor común $c(x)$ de $f(x)$ y $g(x)$ divide a $d(x)$ si vale la fórmula (10). Si $c(x) = A(x)f(x) + B(x)g(x)$, entonces $d(x)$ divide a $c(x)$. Pero $c(x)$ y $d(x)$ difieren solamente por un factor constante y son iguales si ambos tienen coeficiente inicial uno.

El resultado que se acaba de probar demuestra que el m.c.d. $d(x)$ es único, puesto que cualquier otro divisor común del mismo grado que $d(x)$ dividiría a $d(x)$ y diferiría de $d(x)$ por un factor constante igual como lo hace $c(x)$ en la demostración anterior.

El problema de determinar efectivamente los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ de la fórmula (10) se resuelve fácilmente y no se acompañará de una colección de ejercicios.

Si se estima conveniente, para prácticas pueden tomarse los polinomios del ejercicio 1 del artículo 7. Se ilustrará el procedimiento a continuación.

Ejemplo ilustrativo

Hallar los polinomios $a(x)$, $b(x)$ de la fórmula (10) para

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1,$$
$$f(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2.$$

Solución

Según el ejemplo ilustrativo I del artículo 7 se tiene

$$f = (x+2)g + 2r,$$
$$g = (x-2)r - d$$

de modo que $2r = f - (x+2)g$,

$$\begin{aligned} d &= (x-2)r - g = (x-2)\tfrac{1}{2}[f - (x+2)g] - g \\ &= \tfrac{1}{2}(x-2)f - \tfrac{1}{2}(x^2-4)g - g = \tfrac{1}{2}(x-2)f + \tfrac{1}{2}(2-x^2)g. \end{aligned}$$

Como comprobación se calcula

$$\begin{aligned} (x-2)f + (2-x^2)g &= x^6 - 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2x^5 + 4x^3 \\ &\quad + 4x^2 + 6x + 4 + 2x^4 - 4x^3 - 4x - 2 - x^6 + 2x^5 + 2x^3 + x^2 \\ &= 2x^2 + 2 = 2d \end{aligned}$$

Así, pues, se ha probado que

$$a(x) = \tfrac{1}{2}(x-2)$$
$$b(x) = \tfrac{1}{2}(2-x^2)$$

son las soluciones para la fórmula (10).

9. El teorema de factorización única (CURSO COMPLETO). Dos polinomios distintos de cero $f(x)$ y $g(x)$ se llaman ***primos entre sí*** si sus únicos factores comunes son constantes. Entonces su m.c.d. es 1 y, según el teorema 6, existen polinomios $a(x)$ y $b(x)$ tales que

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1. \tag{11}$$

Recíprocamente, si vale la fórmula (11), todo divisor común de $f(x)$ y $g(x)$ divide a 1 y es, por lo tanto, constante. Se ha probado, pues, el siguiente:

Teorema 7. *Dos polinomios* f(x) *y* g(x) *son primos entre sí si y sólo si existen polinomios* a(x) *y* b(x) *tales que valgan la fórmula* (11).

Se tiene entonces el siguiente:

Teorema 8. *Sean* f(x) *y* g(x) *primos entre sí y supóngase que* f(x) *divide al producto* g(x)h(x). *Entonces* f(x) *divide a* h(x).

Usando la fórmula (11) se obtiene

$$h(x) = [a(x)f(x) + b(x)g(x)]h(x)$$
$$= a(x)h(x)f(x) + b(x)g(x)h(x).$$

Por hipótesis, $g(x)h(x) = q(x)f(x)$,

$$h(x) = [a(x)h(x) + b(x)q(x)]f(x),$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 9. *Sea* f(x) *un polinomio irreducible. Entonces* f(x) *y* g(x) *o bien son primos entre sí o bien* f(x) *divide a* g(x).

En efecto, el m.c.d. de $f(x)$ y $g(x)$ divide a $f(x)$. Si éste es 1, los polinomios son primos entre sí. En caso contrario, el m.c.d. es el producto de $f(x)$ por una constante y divide a $g(x)$ y, por lo tanto, también $f(x)$ divide a $g(x)$.

Teorema 10. *Un polinomio irreducible divide a un producto de polinomios si y sólo si divide al menos a uno de los factores.*

El teorema 8 implica que $f(x)$ divide a un producto solamente si $f(x)$ y al menos uno de los factores del producto no son primos entre sí. Según el teorema 9, si $f(x)$ es irreducible, $f(x)$ divide a dicho producto.

Ahora se puede usar el teorema 10 para probar que la factorización en el teorema 5 es única. El resultado es trivial para polinomios de grado menor que el grado n de

$$f(x) = a_0p_1(x) \ldots p_t(x) = a_0q_1(x) \ldots q_s(x).$$

Aquí los polinomios $p_1(x), \ldots, p_t(x), q_1(x), \ldots, q_s(x)$ son irreducibles y tienen coeficiente inicial 1. Según el teorema 10, $p_1(x)$ divide a uno de los $q_i(x)$ y, como ambos son polinomios irreducibles no constantes y con coeficiente inicial 1, deben ser iguales.

Esto demuestra que la fórmula (9) de factorización del teorema 5 es única, excepto por el orden en que se escriban los factores.

10. Polinomios en varios símbolos. Un polinomio en x y y es una expresión algebraica $f(x, y)$ (léase "f de x, y") obtenido al aplicar formalmente un número finito de operaciones enteras a la x, a la y y a las constantes. Este puede ser considerado como polinomio en x, y así puede escribirse en forma única

(12) $f(x, y) = a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \ldots + a_m(y)$.

Los coeficientes $a_i(y)$, desde luego, no serán constantes, sino polinomios en y, siendo m el grado en x de $f(x, y)$; $a_0(y)$ no es el polinomio cero a menos que $f(x, y)$ sea el polinomio cero en x, y y. El polinomio $f(x, y)$ puede también escribirse en la forma

(13) $f(x, y) = b_0(x)y^t + b_1(x)y^{t-1} + \ldots + b_t(x)$.

Los coeficientes $b_0(x), \ldots, b_t(x)$ son entonces polinomios únicos en x; aquí t es el grado en y de $f(x, y)$, y $b_0(x)$ no es cero, excepto cuando $f(x, y)$ sea el polinomio cero.

Las fórmulas (12) y (13) expresan ambas a $f(x, y)$ como una suma de productos de constantes por productos de potencias del tipo x^iy^j. Las dos expresiones difieren solamente en la forma en que se hayan ordenado y agrupado los términos. Si se ignora este agrupamiento, puede definirse el grado de x^iy^j en x y en y como $i + j$, y el grado de $f(x, y)$ en x y en y como el máximo de los grados de cualquiera de sus términos que tengan coeficiente distinto de cero. Por ejemplo,

$$f(x, y) = 3x^4 + 5x^3y^3 + 6x^2(y^5 + 2y^4) + y^6$$

es un polinomio de grado 4 en x, de 6 en y y de 7 en x y y. Puede escribirse también en las formas

$$y^6 + 6x^2y^5 + 12x^2y^4 + 5x^3y^3 + 3x^4$$

o

$$6x^2y^5 + (5x^3y^3 + 12x^2y^4 + y^6) + 3x^4;$$

en esta última forma, los términos están dispuestos de acuerdo con los grados descendentes en x y y.

Si todos los términos de un polinomio son del mismo grado en *todos* los símbolos x, y, z, . . . , se dice que el polinomio es *homogéneo*. Por ejemplo,

$$3x^2 + 2xy - 5y^2$$

es *homogéneo de grado 2* en x, y. Todo polinomio $f(x, y)$ de grado n puede escribirse como una suma

$$(14) \qquad f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y), + \ldots + f_n(x, y)$$

de polinomios homogéneos $f_i(x, y)$ de grado $n - i$. El *polinomio inicial* $f_0(x, y)$ es de grado n y no es cero excepto que $f(x, y) = 0$. Un ejemplo de tal expresión es

$$f(x, y) = (x^6y + 3x^3y^4 + 6x^2y^5) + (2x^4y^2 + 3xy^5) + (2x^2y - y^3) + (3x^2 - xy)$$

en la cual

$$\begin{aligned}
f_0(x, y) &= x^6y + 3x^3y^4 + 6x^2y^5, \\
f_1(x, y) &= 2x^4y^2 + 3xy^5, \\
f_2(x, y) &= f_3(x, y) = 0, \\
f_4(x, y) &= 2x^2y - y^3, \\
f_5(x, y) &= 3x^2 - xy, \\
f_6(x, y) &= f_7(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Nótese que en este ejemplo se ha escrito cada polinomio homogéneo como un polinomio en x con coeficientes constantes por potencias de y. A los polinomios homogéneos se les llama con frecuencia *formas*.

El polinomio general $f(x, y)$ de grado dos es de una considerable importancia en otras ramas de las matemáticas elementales, y puede escribirse en la forma

$$(15) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

en donde las constantes A, B, C, D, E, F son generalmente números reales.

Las definiciones anteriores pueden extenderse a polinomios de cualquier número de símbolos. Cuando el número de símbolos es grande, se acostumbra usar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en vez de $x, y, z, t, \ldots$ Más adelante se estudiarán especialmente las funciones lineales

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$$

y las formas cuadráticas

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

EJERCICIOS ORALES

1. ¿Cuáles son los grados en x, en y y en x, y de los polinomios siguientes:

(a) $3x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 - 3y^4$
(b) $-2x^5 + x^3y^3 - x^6 + 3x^4y + x^5y^2 + 5$
(c) $-x^3y^2 + xy^4 + 3x^5 + 2x^4y$
(d) $-2x^5y^7 + 6x^9y^3 + 6x^4y^8 - 2x^{12}$
(e) $4x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 3x + 1$

2. Expresar cada uno de los polinomios anteriores en cada una de las formas (12), (13) y (14).

3. ¿Cuáles de los polinomios anteriores son formas?

4. ¿Cuáles son los valores de A, B, C, D, E, F de la fórmula (15) para cada uno de los polinomios siguientes?:

(a) $3x^2 - 2xy + 4y^2 + 3x - 2y^2 + 1$
(b) $y^2 + 3y + 1 + 2x^2 - 4x + 3$
(c) $(x + 3y)(x - 4y) + 2$
(d) $(2x + y)(2x - y) - (3x + 2y)(3x - 2y)$
(e) $4(x + 3y)^2 - 5(x + 3y)(3x - y) + 2(x - 3y)^2$
(f) $2(4x + 3y)^2 - (4x + 3y)(3x - 4y) + (3x - 4y)^2 + 2(3x - 4y) - (x + 3y) + 1$

5. ¿De qué grados son los siguientes polinomios?

(a) $x^3 + 3x^2y + 3z^2 - 4t^2 + w^2$
(b) $(x + 3y)(x - 2z)^4 + w^{10}$
(c) $(x + y^2)^5 - t^8$
(d) $(x^2 + y^2)^4 - (x + y + z)^5$

6. Mediante la multiplicación directa o usando las fórmulas anteriores de la lista pruébense las fórmulas siguientes:

(a) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
(b) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
(c) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
(d) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
(e) $x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$
(f) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
(g) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
(h) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
(i) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

EJERCICIOS

Usar las fórmulas del ejercicio oral 6 anterior para probar las factorizaciones siguientes:

(a) $(2x + y)^2 - (2x - y)^2 + (2y)^2 = 4y(2x + y)$
(b) $(3x - 2y)^2 + 25xy - (3x + 2y)^2 = xy$
(c) $(x + 2y)^3 - (x - 2y)^3 = 4y(3x^2 + 4y^2)$
(d) $(2x + y)^3 + (2x - y)^3 - 8xy^2 = 4x(4x^2 + y^2)$
(e) $x^5 + y^5 - x(x^4 - y^4) = (x + y)y^4$
(f) $(2x + y)^4 - 16x(x + y)^3 - y^4 = -4xy(4x^2 + 6xy + 2y^2)$

11. Derivadas (CURSO COMPLETO). Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ es un polinomio arbitrario en x, el polinomio

$$(16)\quad f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + (n-i)a_ix^{n-i-1} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

se llama la *derivada* de $f(x)$. En particular

$$(17)\quad (a)' = 0, \quad (ax + b)' = a, \quad (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b,$$

en donde a, b, c son números cualesquiera.

Las derivadas tienen las propiedades

$$(18)\quad (af + bg)' = af' + bg', \quad (fg)' = fg' + f'g, \quad (f^t)' = tf^{t-1}f'$$

para todos los polinomios f y g, todos los números a y b y todos los enteros positivos t.

Se usarán estas propiedades, que suelen exponerse en los cursos de cálculo y cuya demostración se omite aquí.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar la derivada de

$$f = 5x^6 + 6x^4 - 7x^2 + 2.$$

Solución

$$f' = 30x^5 + 24x^3 - 14x.$$

II. Hallar la derivada de $f = (3x^2 + 5x + 4)^5$ usando la fórmula (18).

Solución

$$\begin{aligned} f' &= 5(3x^2 + 5x + 4)^4(3x^2 + 5x + 4)' \\ &= 5(3x^2 + 5x + 4)^4(6x + 5). \end{aligned}$$

III. Hallar la derivada de $f = (2x - 1)^3(x^2 + 4)^2$ usando la fórmula (18).

Solución

$$\begin{aligned} f' &= (2x - 1)^3[2(x^2 + 4)2x] + (x^2 + 4)^2 3(2x - 1)^2 2 \\ &= (2x - 1)^2(x^2 + 4)[(2x - 1)8x + 6(x^2 + 4)] \\ &= (2x - 1)^2(x^2 + 4)(22x^2 - 8x + 24). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Hallar las derivadas de los siguientes polinomios usando la fórmula (16) y no la (18):

(a) $4x^5 - 5x^3 + 6x - 2$
(b) $2x^3 + 7x^2 - 8x + 1$
(c) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)^3$
(d) $(x^2 + 1)^2(x^2 - 1)$

2. Hallar las derivadas de (*c*) y (*d*) anteriores usando la fórmula (18) así como, desde luego, la definición (16).

3. Usar la fórmula (18) para hallar las derivadas de los polinomios siguientes:

(a) $(x^2 - 1)^3(3x + 2)^4$
(b) $(x + 1)^4(x - 1)^3(2x - 1)^2$
(c) $(x^2 + 1)^3 + (x^2 - 1)^3$
(d) $x^2(x - 1)^4(x + 1)^5$
(e) $(3x^2 + 5)^2 + (x - 3)^2(x + 2) - (8x^4 + 7x^8)$
(f) $x^4(x^3 + x + 1)^2$
(g) $(x^3 - 2x + 1)^3(x^2 - 1)^4$
(h) $(x^3 - x)^4(x^2 + 1)^3$
(i) $(x^4 + 5x^2 - 3x + 1)^8$
(j) $(x^2 - 1)^5 - (x^5 - 1)^2$

12. Determinación de los factores múltiples (CURSO COMPLETO). La derivada de un polinomio $f(x)$ puede usarse para determinar cuándo un factor primo $p(x)$ de $f(x)$ es de multiplicidad mayor que uno.

Teorema 11. *Sea* $\mathrm{d}(x)$ *el m.c.d. de* $\mathrm{f}(x)$ *y* $\mathrm{f}'(x)$. *Entonces todo factor irreducible* $\mathrm{p}(x)$ *de multiplicidad* $\alpha \geqq 1$ *de* $\mathrm{f}(x)$ *es un factor de multiplicidad* $\alpha - 1$ *de* $\mathrm{f}'(x)$ *y también de* $\mathrm{d}(x)$.

En efecto, sea $f(x) = p(x)^\alpha q(x)$ en donde $p(x)$ no divide a $q(x)$ y $\alpha \geqq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) = p(x)^\alpha q'(x) + q(x)[p(x)^\alpha]' &= p(x)^\alpha q'(x) \\ &\quad + \alpha q(x) p(x)^{\alpha-1} p'(x) \\ &= p(x)^{\alpha-1}[p(x) q'(x) + \alpha q(x) p'(x)]. \end{aligned}$$

El polinomio $p(x)$ es irreducible y primo relativo con $q(x)$. Por consiguiente puede dividir a $\alpha q(x) p'(x)$ solamente si divide a $p'(x)$. Pero $p'(x)$ es de grado menor que $p(x)$ y es diferente de cero. Por lo tanto $p(x)$ no divide a $p(x) q'(x) + \alpha q(x) p'(x)$. De aquí se sigue que $p(x)$ es un factor de multiplicidad $\alpha - 1$ de $f'(x)$. Entonces $p(x)$ es un factor de multiplicidad $\alpha - 1$ de $d(x)$.

Se sigue de este resultado que el m.c.d. de un polinomio $f(x)$ y su derivada es el producto de las potencias $p(x)^{\alpha-1}$ de aquellos factores primos con coeficiente inicial 1 de $f(x)$ que tenga multiplicidad $\alpha > 1$. Entonces, si $f(x)$ no tiene factores primos de multiplicidad $\alpha > 1$, el m.c.d. de $f(x)$ y $f'(x)$ es 1.

Ejemplo ilustrativo

Calcular los factores múltiples de

$$f = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32$$

y descomponer en factores o factorizar f.

Solución

$f' = 5x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 32x + 16$. Se multiplica f por 25 para evitar fracciones y se hacen los cálculos siguientes:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 5x + 2 & 5x - 2 \\
\hline
x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & 5x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 32x + 16 & 25x^5 - 50x^4 - 200x^3 + 400x^2 + 400x - 800 \\
 & \underline{5x^4 - 10x^3 - 20x^2 + 40x} & \underline{25x^5 - 40x^4 - 120x^3 + 160x^2 + 80x} \\
 & 2x^3 - 4x^2 - 8x + 16 & -10x^4 - 80x^3 + 240x^2 + 320x - 800 \\
 & \underline{2x^3 - 4x^2 - 8x + 16} & \underline{-10x^4 + 16x^3 + 48x^2 - 64x - 32} \\
 & 0 & -96x^3 + 192x^2 + 384x - 768
\end{array}$$

$$r = -96(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} 25f = f'(5x - 2) - 96d &= d(5x + 2)(5x - 2) - 96d \\ &= d[(25x^2 - 4) - 96] = d(25x^2 - 100), \end{aligned}$$

$f = (x^2 - 4)d$. Esto puede calcularse también efectuando directamente la división. Ahora bien, cada factor de d de **multiplicidad** m es un factor de multiplicidad $m + 1$ de f y los únicos factores posibles son $2 + x$, $x - 2$, $x^2 - 4$. Dividiendo d entre $x + 2$ se obtiene $d = (x + 2)(x^2 - 4x + 4) = (x + 2)(x - 2)^2$, $f = (x + 2)^2(x - 2)^3$.

EJERCICIOS

Usese el proceso arriba indicado para obtener los factores múltiples de los siguientes polinomios $f(x)$ y las factorizaciones de ellos en los casos en que tal factorización quede determinada por la existencia de factores múltiples. Se advierte al estudiante que los cálculos pueden ser complicados.

(*a*) $f = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + x + 2$
(*b*) $f = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 30x + 35$
(*c*) $f = x^4 + 4x^3 - 16x - 16$

(d) $f = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$
(e) $f = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24x - 48$
(f) $f = x^3 + 4x^2 + 21x - 18$
(g) $f = x^3 - 6x^2 + 32$
(h) $f = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$
(i) $f = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
(j) $f = x^8 - x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 7x^2 + x + 2$
(k) $f = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$
(l) $f = x^6 - 6x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 5$
(m) $f = x^7 + 14x^3 - 7x^2 + 21x - 56$
(n) $f = x^7 - 35x^4 + 115x^3 - 81x^2 + 70x - 15$
(o) $f = x^9 - 6x^3 - 18x + 36$
(p) $f = x^{10} - 22x^6 - 20x^4 - 3x^2 - 4$

13. Funciones racionales. Una *función racional* en varios símbolos es cualquier expresión algebraica que pueda obtenerse aplicando formalmente un número finito de operaciones racionales (adición, sustracción, multiplicación y división) a los símbolos y números. Se supondrá que se obedecen las leyes para las operaciones racionales y así usando el procedimiento del artículo 2 del capítulo III, toda función racional puede expresarse como el cociente de *dos* polinomios. Llamaremos a este proceso la *simplificación* de la función racional.

Obsérvese que si $R(x)$ es un símbolo para una función racional en x, y c es un número cualquiera, el valor $R(c)$ obtenido al sustituir c en $R(x)$ puede no tener sentido. Por ejemplo, si

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y se sustituye x por 1, entonces

$$R(1) = \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

lo cual carece de sentido. Sin embargo, se tiene la igualdad formal entre $R(x)$ y la función racional (que en este caso es un polinomio)

$$S(x) = x + 1,$$

y entonces $S(1) = 2$. Así pues no es cierto que si $R(x)$ y $S(x)$ son dos funciones racionales iguales, sus valores $R(c)$ y $S(c)$ sean siempre iguales. Los valores $R(c)$ y $S(c)$ resultan iguales cuando ningún polinomio $f(x)$ del denominador de alguna de las funciones racionales $R(x)$ y $S(x)$ es tal que $f(c) = 0$.

Finalmente, nótese que para expresiones del tipo

$$R(x) = \frac{1}{x-1}$$

el valor $R(1)$ es de la forma $1/0$ y no se puede reemplazar $R(x)$ por una función $S(x)$ formalmente igual a $R(x)$ y tal que $S(1)$ tenga un valor numérico ordinario.

Ejemplos ilustrativos

I. Simplificar

$$R(x) = \frac{\dfrac{2x-1}{2x+1} - \dfrac{2x+1}{2x-1}}{\dfrac{2x}{4x^2-1} - \dfrac{1}{2x-1}}$$

Solución

$$R(x) = \frac{\dfrac{(2x-1)^2-(2x+1)^2}{4x^2-1}}{\dfrac{4x^2-2x-(4x^2-1)}{(4x^2-1)(2x-1)}}$$

$$= \frac{4x^2-4x+1-(4x^2+4x+1)}{4x^2-1} \cdot \frac{(4x^2-1)(2x-1)}{-(2x-1)}$$

$$= \frac{-8x}{-1} = 8x.$$

II. Simplifíquese la función anterior mediante una multiplicación.

Solución

Multiplíquense el numerador y el denominador por

$$4x^2-1 = (2x+1)(2x-1)$$

para obtener

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{(2x-1)^2-(2x+1)^2}{2x-(2x+1)} \\ &= \frac{[(2x-1)+(2x+1)][(2x-1)-(2x+1)]}{-1} \\ &= \frac{4x\cdot(-2)}{-1} = 8x. \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Expresar las funciones racionales que siguen como polinomios o cocientes de dos polinomios:

(a) $$\frac{\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x-2}{2}}{\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}}$$

(b) $$\frac{\dfrac{1}{x+1}+2}{\dfrac{1}{x^2-1}-4}$$

(c) $$\frac{\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}-1}{\dfrac{x-y}{x+y}-1}$$

(d) $$\frac{\left(\dfrac{x+2a}{x+a}\right)^2-\left(\dfrac{x+2a}{x+a}\right)-2}{\dfrac{x+2a}{x+a}-2}$$

(e) $$\frac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$$

(f) $$\frac{x^2-1-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x^2-1}-(x-1)}$$

(g) $$\frac{\dfrac{x}{x^2-4y^2}+\dfrac{x-2y}{x}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x}+\dfrac{x}{x-2y}}$$

(h) $$\frac{1}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{x-1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$$

Resp.: $\dfrac{x^2}{x^2-x-1}$.

(i) $$\frac{y^2-1}{2y+1-\dfrac{y}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{y}}}}$$

Resp.: $y-1$.

(j) $$\frac{x+1}{x+\dfrac{x}{x-1}}+\frac{2x}{x-\dfrac{x}{x+1}}$$

Resp.: $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2}$.

(k) $$\frac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}}$$ *Resp.:* x^2+1.

(l) $$\frac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{xy-1}{y^2-x^2}}{\dfrac{x^2-1}{(y-x)^2}\left(\dfrac{y-1}{x-1}-1\right)}$$ *Resp.:* $\dfrac{1-x}{y+x}$.

(m) $$\frac{\dfrac{x^2}{y^4}-\dfrac{y^2}{x^4}}{\dfrac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2y^2}}$$ *Resp.:* $\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}$.

(n) $$\frac{\dfrac{1}{x^2-2x-2}-\dfrac{1}{x^2+2x+2}}{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x^2+4}{x^4+4}\right)\left(\dfrac{1}{x^4-4(x+1)^2}\right)}$$ *Resp.:* $\dfrac{x^6+4x^2}{1-x}$.

2. Simplificar las funciones racionales siguientes:

(a) $$\frac{(x-1)^2(2x+3)-(x^2-3x+2)2(x-1)}{(x-1)^4}$$ *Resp.:* $\dfrac{7}{x^2-2x+1}$.

(b) $$\frac{(x-2)^2[(x+1)(x-1)+(x+1)(x+2)+}{(x-2)^4}$$
$$\frac{+(x-1)(x+2)]-2(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)}{(x-2)^4}$$

(c) $$\frac{x^3(3x^2+4x)-(x^3+2x^2+1)3x^2}{x^6}$$ *Resp.:* $\dfrac{-2x^2-3}{x^4}$.

(d) $$\frac{\dfrac{(t+1)6t-3t^2}{(t+1)^2}}{\dfrac{2t(t+1)-(t+1)^2}{t^2}}$$

(e) $$\frac{\dfrac{3(1+t^3)-3t(3t^2)}{(1+t)^2}}{\dfrac{(1+t^3)6t-(3t^2)(3t^2)}{(1+t^3)^2}}$$ *Resp.:* $\dfrac{(1-2t^3)(t^3-t+1)^2}{2t-t^4}$

3. Escribir las siguientes funciones racionales como la suma de un polinomio en x y una función racional cuyo numerador sea de grado menor que el del denominador:

(*a*) $\dfrac{x-1}{x+1}$ *Resp.:* $1-\dfrac{2}{x+1}$.

(*b*) $\dfrac{3x-2}{3x+2}$

(*c*) $\dfrac{x-1}{3x-1}$

(*d*) $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+2x-1}$

(*e*) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-1}$

(*f*) $\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x}{x^3+3x^2+3x+1}$

(*g*) $\dfrac{x^6+5x^3+6x^2-3x+1}{x+1}$

(*h*) $\dfrac{x^6-5x^4+4x^3+9x^2-12x+2}{x^3-5x^2+6x-1}$

(*i*) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x^2-1}}$.

(*j*) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ *Resp.:* $x-1-\dfrac{2}{x^2-1}$.

(*k*) $\dfrac{x^3}{x^2-1}\;\dfrac{x^2+x}{x-1}$

(*l*) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$ *Resp.:* $1-\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

(*m*) $\dfrac{x}{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}\times\dfrac{\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$

(*n*) $\dfrac{y^2-\dfrac{2}{y^2}}{1-\dfrac{1}{y^2}}$ *Resp.:* $y^2+1-\dfrac{1}{y^2-1}$.

CAPITULO V

IDENTIDADES Y APLICACIONES

1. El teorema del binomio. Las fórmulas para $(x + y)^2$ y $(x + y)^3$ usadas en el capítulo IV son los casos $n = 2, 3$ del llamado *teorema del binomio,* que se explica a continuación.

Sea n cualquier entero positivo. Entonces la expresión $(x + y)^n$ significa un producto de n factores cada uno de los cuales es $x + y$. Las leyes del álgebra denotan que este producto de n factores puede expresarse como una suma de 2^n términos cada uno de los cuales es un producto de una potencia de x por una potencia de y. El grado del polinomio en x y y es n, y el polinomio es homogéneo. De aquí que el grado de cada término de la suma de 2^n términos es n. Si se agrupan y ordenan los términos de acuerdo con las potencias descendentes de x, se tiene una suma que puede escribirse como sigue:

$$(1) \quad (x + y)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ix^{n-i}y^i + \ldots + a_ny^n.$$

Quede bien claro que se ha expresado $(x + y)^n$ como una suma de $n + 1$ términos, en los que

$$a_0 = a_n = 1,$$

y que todos los coeficientes a_i son enteros positivos. Nótese que el término que lleva el coeficiente a_i e incluye al factor y^i no es el término i-ésimo de la suma, sino que *es su término* $(i + 1)$.

El teorema del binomio establece que

$$(2) \qquad a_i = C_{n,i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}$$

El coeficiente a_0 entra dentro de esta fórmula si se acuerda que $C_{n,0}$ es igual a 1.

La prueba del teorema del binomio puede hacerse muy fácilmente considerando un producto

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\dots(x_n + y_n)$$

de n diferentes binomios. Esto es también una suma de 2^n términos cada uno de los cuales es un producto de $n - i$ de las letras $x_1, \dots, x_n$ e i de las letras $y_1, \dots, y_n$. Si se mantiene a i fija, se ve que el número de términos con i factores de $y_1, \dots, y_n$ es el número de combinaciones de n letras tomadas de i en i. Si se pone $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ y $y_1 = y_2 = \dots y_n = y$, cada uno de estos términos viene a ser $x^{n-i}y^i$, hay $C_{n,i}$ términos, el producto resulta ser $(x + y)^n$, y se tiene $a_i = C_{n,i}$.

Los coeficientes de $x^{n-i}y^i$ y $y^{n-i}x^i$ en el desarrollo del binomio (1) deben ser iguales, puesto que la expresión $(x + y)^n$ es simétrica en x y y. Esto es consecuencia de la fórmula (2) y de la igualdad conocida $C_{n,i} = C_{n,n-i}$. Si n es par, se escribe $n = 2m$, y se ve que la fórmula (1) es una suma de un número impar $2m + 1$ de términos. Entonces hay un *término intermedio* que es el término $(m + 1)$:

$$(3) \qquad C_{n,m}x^m y^m, \qquad (n = 2m).$$

Si n es impar, se escribe $n = 2m + 1$. Entonces el desarrollo tiene $2(m + 1)$ términos y hay dos términos que pueden llamarse *términos intermedios*. Estos son, evidentemente, el término final de los $m + 1$ primeros términos y el término inicial de los últimos $m + 1$ términos. Por consiguiente, éstos son los términos $(m + 1)$ y $(m + 2)$:

$$(4) \qquad C_{n,m}x^{m+1}y^m, \qquad C_{n,m}x^m y^{m+1} \qquad (n = 2m + 1).$$

Nótese que si se hace $x = y = 1$, el desarrollo del binomio viene a dar

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n}.$$

Por lo tanto, el *número total posible de combinaciones de* n *letras es* $2^n - 1$.

Para concluir, obsérvese que la ***serie binomial*** (usada en el capítulo III) se obtiene empleando el desarrollo del binomio como si se aplicara en el caso en que n no fuese un entero positivo.

Ejemplos ilustrativos

I. Desarrollar el binomio de $(3a - b/2)^5$.

Solución

El desarrollo es

$$(3a)^5 + 5(3a)^4\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{5\cdot 4}{2}(3a)^3\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}(3a)^2\left(-\frac{b}{2}\right)^3$$
$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2}(3a)\left(-\frac{b}{2}\right)^4 + \left(-\frac{b}{2}\right)^5 = 243a^5 - \frac{405}{2}a^4b$$
$$+ \frac{135}{2}a^3b^2 - \frac{45}{4}a^2b^3 + \frac{15}{16}ab^4 - \frac{b^5}{32}.$$

II. Hallar el octavo término de $(2a + b/2)^{15}$.

Solución

Se tiene que $n = 15$ e $i = 7$. El término es

$$C_{15,7}(2a)^8\left(\frac{b}{2}\right)^7 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}2a^8b^7 = 12\,870a^8b^7.$$

III. Hallar los términos intermedios de $(2x - 3y)^7$ y $(2x + 3y)^{10}$.

Solución

En el primer caso, $n = 7 = 2\cdot 3 + 1$, de modo que $m = 3$. Los términos son

$$C_{7,3}(2x)^4(-3y)^3 = (35)(16)(-27)x^4y^3, \text{ y}$$
$$(35)(2x)^3(-3y)^4 = (35)(8)(81)x^3y^4.$$

En el segundo caso, $m = 5$, y el término intermedio es

$$C_{10,5}(2x)^5(3y)^5 = (252)(2^5)(3^5)x^5y^5.$$

EJERCICIOS

1. Desarrollar los binomios:

(*a*) $(x-1)^4$

(*b*) $(x-1)^5$

(*c*) $(x+y)^6$

(*d*) $\left(2a^2-\dfrac{b}{3}\right)^4$

(*e*) $\left(\dfrac{1}{3x^2}-2x^2\right)^5$

(*f*) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}\right)^7$

(*g*) $\left(\dfrac{2}{3a}-1\right)^6$

(*h*) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^4$

(*i*) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^6$

(*j*) $(2x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}})^4$

2. Hallar el término emésimo de los desarrollos de los binomios siguientes para los valores de m dados:

(*a*) $(\frac{1}{3}-6x)^{12}$, $m=9$

(*b*) $\left(a^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{18}$, $m=7$

(*c*) $(a^3-2b^2)^{15}$, $m=7$

(*d*) $\left(2x-\dfrac{1}{2y}\right)^{19}$, $m=8$

(*e*) $\left(3x-\dfrac{y}{3}\right)^{13}$, $m=11$ *Resp.*: $\dfrac{1001}{81}x^3y^{10}$.

(*f*) $(a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{3}})^{18}$, $m=4$ *Resp.*: $-102a^4$.

(*g*) $(a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{3}})^{17}$, $m=6$ *Resp.*: $\dfrac{1547}{8}a^{7/3}$.

(*h*) $(x-y)^{25}$, $m=20$. *Resp.*: $-C_{25.6}x^6y^{19}$.

3. Hallar los términos intermedios de los desarrollos de binomios del ejercicio 2.

4. Expresar los números siguientes como potencias de los binomios $10^k \pm 1$ o $10^k \pm 2$, y así calcularlos usando el teorema del binomio.

(*a*) $(99)^4$

(*b*) $(998)^3$

(*c*) $(99)^6$

(*d*) $(9999)^3$ *Resp.*: 999 700 029 999.

(*e*) $(998)^4$ *Resp.*: 992 023 968 016.

(*f*) $(98)^5$ *Resp.*: 9 039 207 968.

2. Fórmulas para sumas. El desarrollo del binomio (1) es lo que se llama una *identidad algebraica*. En él se establece que dos expresiones algebraicas que contienen x, y y n son idénticas en el sentido que, si se ejecutan las operaciones indicadas, las dos expresiones vienen a ser precisamente la misma. Las expresiones son polinomios en x y en y, pero no son polinomios en el exponente n. Se considerará en este artículo a las *expresiones algebraicas que contienen varias letras* como *funciones* de estas letras, y se dirá que dos expresiones son idénticas cuando al efectuar las operaciones indicadas las dos expresiones resultan iguales. A esta relación se le llamará una *identidad algebraica.*

Ya se estudiaron las identidades de polinomios, y se pasará en seguida a estudiar una nueva clase de identidades no algebraicas que reciben el nombre de *fórmulas para sumas.* Estas fórmulas son las que expresan la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ de los primeros n términos de las sucesiones especiales $a_1, a_2 \ldots$ como expresión algebraica en el símbolo n. Las fórmulas pueden comprobarse empleando la consecuencia siguiente del principio de la inducción matemática.

Teorema para sumas. *Sea* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \ldots$ *una sucesión cuyo término general* a_n *es una función de* n *y sea* $\mathrm{f(n)}$ *una función de* n *tal que*

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{f(1) = a_1, \quad f(n) - f(n-1) = a_n}$$

sea una identidad algebraica. Entonces la fórmula

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{f(n) = a_1 + \ldots + a_n}$$

es verdadera para todos los valores de n.

Sea K el conjunto de todos los enteros positivos para los cuales la fórmula (6) es válida. Puesto que $f(1) = a_1$, el entero 1 está en K. Si k está en K, entonces $f(k) = a_1 + \ldots + a_k$, y

$$f(k) + a_{k+1} = a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}.$$

Sustitúyase n por $k + 1$ en la fórmula (5) para obtener

$$f(k+1) = f(k) + a_{k+1} = a_1 + \ldots + a_{k+1}$$

y por tanto $k + 1$ está en K. El *principio de la inducción mamática* establece que K es el conjunto de todos los enteros positivos, esto es, la fórmula (6) es verdadera para todos los valores de n.

Ejemplos ilustrativos

I. Probar que $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

Observación: Se intenta probar que la suma de los primeros n enteros es igual a $n(n+1)/2$.

Solución

En esta sucesión $a_n = n$, y $f(n) = n(n+1)/2$. Entonces $a_1 = 1$, $f(1) = 1 \cdot 2/2 = 1 = a_1$. También

$$f(n) - f(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1-n+1)}{2}$$
$$= \frac{2n}{2} = n = a_n,$$

y este resultado se deduce del teorema para sumas.

II. Probar que si $r \neq 1$ entonces $1 + r + \ldots + r^{n-1}$
$$= (r^n - 1)/(r-1).$$

Solución

En esta sucesión $a_n = r^{n-1}$, $f(n) = (r^n - 1)/(r-1)$. Entonces
$$a_1 = r^{1-1} = 1,$$
y $f(1) = (r-1)/(r-1) = 1 = a_1$. También
$$f(n) - f(n-1) = \frac{(r^n - 1) - (r^{n-1} - 1)}{r-1} = \frac{r^{n-1}(r-1)}{r-1} = a_n$$
que es lo que se buscaba.

III. Probar que $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + n(n+2)$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7).$$

Solución

Aquí $f(1) = \frac{1}{6}(2 \cdot 9) = 3 = a_1$ y
$$f(n) - f(n-1) = \tfrac{1}{6}[n(n+1)(2n+7) - (n-1)n(2n+5)]$$
$$= \tfrac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 7 - 2n^2 - 3n + 5) = \tfrac{1}{6}n(6n+12)$$
$$= n(n+2) = a_n$$
que es lo que se deseaba.

EJERCICIOS

1. Probar las fórmulas siguientes empleando el teorema para sumas:

(*a*) $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(*b*) $1 + 5 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

(*c*) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(*d*) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$

(*e*) $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

(*f*) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(*g*) $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

(*h*) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(*i*) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(*j*) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(*k*) $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + (1+n)(3+n)$
$$= \frac{n}{6}(2n^2 + 15n + 31)$$

(*l*) $2 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + \ldots + (1+n)(9+n)$
$$= \frac{n}{6}(2n^2 + 33n + 85)$$

(*m*) $(e+1)(f+1) + (e+2)(f+2) + \ldots + (e+n)(f+n)$
$$= \frac{n}{6}(n-1)(2n-1) + \frac{n(n-1)}{2}(e+f+2)$$
$$+ n(e+1)(f+1)$$

(*n*) $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + n^2(n+1$
$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

(*o*) $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + \ldots + (3n-2)(3n+1)$
$$= n(3n^2 + 3n - 2)$$

(*p*) $\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{n}{(n+2)(n+3)(n+4)}$
$$= \frac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}$$

(q) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$

(r) $1\cdot 2+2\cdot 2^2+\ldots+n^2=(n-1)2^{n+1}+2$

(s) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+(\frac{1}{2})^n=1-(\frac{1}{2})^n$

(t) $3+3^2+\ldots+3^n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$

2. Probar *(a)* del ejercicio 1 por sustracción de las dos fórmulas derivadas del ejemplo ilustrativo I.

3. Probar (*d*) del ejercicio 1 por sustracción de las dos fórmulas derivadas de *(c)*.

4. Derivar la fórmula

$$x^n+x^{n-1}y+\ldots+n^{n-i}y^i+\ldots+y^n=\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$$

sustituyendo r por x/y del ejemplo ilustrativo II.

5. Derivar un par de fórmulas correspondientes en los casos en que $n=2m$ ó $2m+1$ sustituyendo r por $-x/y$.

3. Método de los coeficientes indeterminados (CURSO COMPLETO). El lector debe sentir curiosidad de saber cómo se obtuvieron las fórmulas probadas. Se satisfará esta curiosidad en el caso en que a_n sea un polinomio en n, y así se introducirá el llamado *método de coeficientes indeterminados*.

Sea $a_n=g(n)$ un polinomio de grado m. Entonces los ejercicios del artículo 2 sugieren que

$$f(n)=c_0n^{m+1}+c_1n^m+\ldots+c_{m+1}$$

es un polinomio de grado $m+1$ cuyos coeficientes se deben determinar. Por el teorema de la suma, la expresión

$$(7)\qquad c_0[n^{m+1}-(n-1)^{m+1}]+c_1[n^m-(n-1)^m] \\ +\ldots+c_m[n-(n-1)]-g(n)$$

ha de ser idénticamente cero, y se debe tener también

$$(8)\qquad f(1)=c_0+\ldots+c_{m+1}=g(1).$$

La diferencia es de grado m a lo más. Empleando el teorema del binomio se obtiene el término $c_0(m+1)n^m$ y se puede elegir c_0 de modo que el grado de la expresión en la fórmula (7) sea a lo más $m-1$. Entonces se usa este valor de c_0 y se elige c_1 en c_1mn^{m-1} de modo que el grado de la expresión en la fórmula (7) sea a lo más $m-2$. La sucesión de las determinaciones acaba con la determinación de c_m de modo que el término constante de la expresión en la fórmula (7) sea cero. Se elige entonces $c_{m+1} = g(1) - (c_0 + \ldots + c_m)$, y se tiene la fórmula deseada.

Realmente sólo es necesario emplear el procedimiento mencionado para obtener fórmulas para sumas de potencias

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

Efectivamente, si $a_n = b_0n^m + b_1n^{m-1} + \ldots + b_m$, entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_0(1^m + 2^m + \ldots + n^m) \\ + b_1(1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + n^{m-1}) + \ldots \\ + b_1(1 + 2 + \ldots + n) - nb_m \end{aligned}$$

y se pueden sustituir las expresiones polinomiales por $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, para $k = 1, \ldots, m$, suponiendo éstas ya obtenidas.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar una fórmula para $1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + \ldots + n(4n + 1)$ por el método de coeficientes indeterminados.

Solución

Aquí $a_n = 4n^2 + n$ y se desea un polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $a + b + c + d = 5$, y

$$a[x^3 - (x-1)^3] + b[x^2 - (x-1)^2] + c = 4x^2 + x.$$

Entonces $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$, $x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$ y $3a = 4$, $a = \frac{4}{3}$, $-3(\frac{4}{3}) + 2b = 1$, $2b = 5$, $b = \frac{5}{2}$, $\frac{4}{3} - \frac{5}{2} + c = 0$, de modo que $c = \frac{15}{6} - \frac{8}{6} = \frac{7}{6}$. Finalmente

$$a + b + c + d = \tfrac{8}{6} + \tfrac{15}{6} + \tfrac{7}{6} + d = d + 5 = 5,$$

$d = 0$. Por esto $f(n) = \frac{1}{6}n(8n^2 + 15n + 7) = \frac{1}{6}n(n+1)(8n+7)$.

II. Hallar $f(n)$ en el ejemplo ilustrativo I mencionado empleando las fórmulas para $1 + \ldots + n$ y $1^2 + \ldots + n^2$.

Solución

$a_n = 4n^2 + n$ y así

$$f(n) = 4(1 + \dots + n^2) + (1 + \dots + n) = \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}\,[(8n+4)+3] = \frac{n(n+1)(8n+7)}{6}.$$

III. Hallar una fórmula para $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

Solución

Se desea

$$a[x^5 - (x-1)^5] + b[x^4 - (x-1)^4] + c[x^3 - (x-1)^3]$$
$$+ d[x^2 - (x-1)^2] + e[x - (x-1)] = x^4.$$

Así

$$a(5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1) + b(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1)$$
$$+ c(3x^2 - 3x + 1) + d(2x - 1) + e = x^4.$$

Por tanto, $a = \frac{1}{5}$, $-2 + 4b = 0$ y $b = \frac{1}{2}$, $2 - 3 + 3c = 0$ y $c = \frac{1}{3}$,

$$-1 + 2 - 1 + 2d = 0 \text{ y } d = 0,\ \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + e = 0,$$

$e = \dfrac{15 - 10 - 6}{30} = -\dfrac{1}{30}$. Finalmente,

$a + b + c + d + e + f = \dfrac{6 + 15 + 10 - 1}{30} + f$, $f = 0$. Se ha demostrado que

$$1^4 + \dots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}.$$

EJERCICIOS

1. Usar el método de coeficientes indeterminados para derivar una fórmula para $a_1 + \dots + a_n$ en los siguientes casos:

(a) $a_n = (n-1)(n+2)$

(b) $a_n = (2n+1)(2n-3)$

(c) $a_n = n(3n-1)$

(d) $a_n = 2n^3 - n^2$

(e) $a_n = (n^2+1)(n-1)$

(f) $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(g) $a_n = n^2 + 3n - 1$

(h) $a_n = n^3 + 2n - 1$

(i) $a_n = n^4 - n$

(j) $a_n = n^5$

2. Derivar las fórmulas en (a) — (i) del ejercicio 1 empleando fórmulas previamente determinadas para las sumas de potencias.

4. Progresiones aritméticas. Las fórmulas para las sumas pueden aplicarse para obtener la suma de n términos de dos clases de sucesiones especiales llamadas *progresiones*. La primera de éstas es la *progresión aritmética* en la que la *diferencia*

$$d = a_{i+1} - a_i \tag{9}$$

de dos términos consecutivos cualesquiera es una constante fija. Se expresa con d la *diferencia común* en la progresión.

Se obtendrá ahora una fórmula para el término general de una progresión aritmética. Si a_1 es el primer término, el segundo es $a_2 = a_1 + d$, el tercero es $a_3 = a_1 + 2d$, y así sucesivamente. De esto se deduce que el término general es

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{10}$$

La suma de n términos de una progresión aritmética se denotará S_n. Como cada término tiene un sumando a_1, se tiene que $S_n = na_1 + [0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1)]d$. Empleando el ejemplo ilustrativo del artículo 2 con n sustituido por $n - 1$, se tiene

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]. \tag{11}$$

Como $a_n = a_1 + (n-1)d$, esta fórmula puede modificarse para obtener

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right). \tag{12}$$

Puede considerarse que en la sucesión finita $a_1, \ldots, a_n$ se tiene como *término medio* $(a_1 + a_n)/2$, y la fórmula (12) expresa que la suma es igual al número de términos multiplicado por el término medio.

Una progresión aritmética puede servir para definir otras progresiones aritméticas con la misma diferencia común pero con un punto de partida distinto. Por ejemplo, si $a_1, a_2 \ldots$ es una progresión aritmética, también lo es $b_1, b_2 \ldots,$ donde $b_1 = a_5,\ b_2 = a_6 \ldots,\ b_n = a_{n+4} \ldots$ También se puede extender una progresión aritmética juntando los términos $a_1 + (n-1)d$ en los que n toma valores enteros negativos. Estos son los términos $a_1 - d,\ a_2 - 2d \ldots$ y forman una progresión aritmética por ellos mismos con una diferencia común $-d$.

En el estudio de las progresiones aritméticas *finitas* de n términos, el número n es el *número de términos* y es usual llamar a_1 al *primer término* y a_n *al último*. En los casos en que se desea calcular S_n, y que a_n y d se dan, es lo más sencillo invertir la progresión. Entonces se convertirá en una progresión $b_1, \ldots, b_n$ en la cual $b_1 = a_n$ y la diferencia común es $-d$. Como que $b_i = a_{n-i+1}$, se tiene

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n,$$

$$S_n = na_n = \frac{n(n-1)}{2} d.$$

Si se dan dos números a y b y un entero positivo m, se puede formar una progresión aritmética de $n = m + 2$ términos en que $a = a_1$ es el primer término y $b = a_{m+2}$ es el último. Los m términos intermedios se llaman un conjunto de m *medios aritméticos* entre a y b. La diferencia común es

$$d = \frac{b-a}{n-1} = \frac{b-a}{m+1}, \tag{13}$$

y los medios son

$$a + \frac{b-a}{m+1},\ a + 2\frac{b-a}{m+1} \ \ldots,\ a + m\frac{b-a}{m+1}. \tag{14}$$

Cuando $m = 1$, el medio simple se llama *medio aritmético* de a y b, y su valor es $\dfrac{a+b}{2}$. Es el promedio de a y b.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar d y S_{10} si $a_1 = -8$ y $a_{10} = 19$.

Solución

$a_{10} = a_1 + 9d = -8 + 9d = 19$; $9d = 27$; $d = 3$. También

$$S_{10} = {}^{10}\!/_{2}(a_1 + a_n) = 5 \cdot 11 = 55.$$

II. Hallar d y a_8 si $a_1 = 15$, y $S_{10} = 60$.

Solución

$S_{10} = {}^{10}\!/_{2}(2 \cdot 15 + 9d) = 5(30 + 9d) = 60$. Por tanto, $9d + 30 = 12$. $9d = -18$, $d = -2$. Entonces, $a_8 = 15 + 7d = 1$.

III. Hallar a_1, a_{10}, S_{10} si $a_5 = -3$ y $a_{15} = 17$.

Solución

Escríbase $a_5 = b_1$ y $a_{15} = b_{11}$. Entonces $b_{11} = b_1 + 10d = -3 + 10d = 17$; $d = 2$. Esta es la misma diferencia común que en a_1, $a_2, \ldots,$ y así $a_5 = a_1 + 4d = -3 = a_1 + 8$; $a_1 = -11 + 9d = 7$; $S_{10} = {}^{10}\!/_{2}(-11 + 7) = -20$.

IV. Interpolar seis medios aritméticos entre -5 y 23.

Solución

$a_1 = -5$, $a_8 = 23$, de modo que $23 = -5 + 7d$ y $d = 4$. Los medios son $-1, 3, 7, 11, 15, 19$.

V. En una progresión aritmética $S_{10} = 115$ y $d = 3$. Hallar a_{10}.

Solución

La progresión inversa tiene $a_{10} = b_1$, $d = -3$, y la misma suma $S_{10} = 115 = 5(2b_1 + 9d) = 5(2b_1 - 27)$. Entonces $23 = 2b_1 - 27$, $a_{10} = b_1 = 25$.

EJERCICIOS

1. En una progresión aritmética hallar lo siguiente:

(*a*) S_8, a_6 si $a_1 = 3$, $d = -4$

Resp.: $S_8 = -88$, $a_6 = -17$.

(b) S_{11}, a_9 si $a_1 = 5$, $d = 2$

(c) S_{14}, a_{14} si $a_1 = -3$, $d = 3$

Resp.: $S_{14} = 231$, $a_{14} = 36$.

(d) S_{12}, a_{12} si $a_1 = -6$, $a_8 = 6$

(e) S_9, a_3 si $a_7 = 13$, $a_{12} = 28$

Resp.: $S_9 = 63$, $a_3 = 1$.

(f) S_8, a_{12} si $a_2 = 12$, $a_8 = -12$

(g) d, a_8 si $S_8 = 108$, $a_1 = 24$

Resp.: $d = -3$, $a_8 = 3$.

(h) d, a_7 si $S_{10} = 25$, $a_1 = 20$

(i) d, a_1 si $S_9 = 90$, $a_9 = 14$

Resp.: $d = 1$, $a_1 = 6$.

(j) d, a_{11} si $S_8 = -108$, $a_4 = -15$

(k) a_1, a_9 si $S_9 = 117$, $d = 6$

Resp.: $a_1 = -11$, $a_9 = 37$.

(l) a_1, a_{12} si $S_{12} = 138$, $d = 5$

(m) n, a_1 si $S_n = 153$, $d = 2$, a_1 entero

2. Interpolar m medios aritméticos entre a y b en los siguientes casos:

(a) $m = 6$, $a = 3$, $b = -11$

Resp.: $1, -1, -3, -5, -7, -9$.

(b) $m = 5$, $a = -2$, $b = 4$

(c) $m = 7$, $a = 6$, $b = 10$

Resp.: $6\frac{1}{2}, 7, 7\frac{1}{2}, 8, 8\frac{1}{2}, 9, 9\frac{1}{2}$.

(d) $m = 11$, $a = 18$, $b = 14$

(e) $m = 8$, $a = 10$, $b = -17$

Resp.: $7, 4, 1, -2, -5, -8, -11, -14$.

(f) $m = 9$, $a = -9$, $b = -7$

(g) $m = 3$, $a = -6$, $b = 6$

Resp.: $-3, 0, 3$.

(h) $m = 14$, $a = 0$, $b = -5$

(i) $m = 5$, $a = 16$, $b = -8$

Resp.: $12, 8, 4, 0, -4$.

(j) $m = 8$, $a = 200$, $b = 20$

5. Progresiones geométricas. Una *progresión geométrica* es una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ en la que la razón

$$r = \frac{a_{i+1}}{a_i} \tag{15}$$

de dos términos consecutivos cualesquiera es una constante. Esta se llama *razón común* de la progresión. Entonces $a_{i+1} = ra_i$, $a_2 = ra_1$, $a_3 = ra_2 = r^2a_1$, y se ve que

$$a_n = a_1r^{n-1}. \tag{16}$$

Por el ejemplo ilustrativo II del artículo 2 se ve que la suma de los n términos de la progresión se da por

$$S_n = a_1\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1}. \tag{17}$$

Lo mismo que las progresiones aritméticas finitas, las progresiones geométricas también pueden invertirse. Esto se verifica escribiendo $b_1 = a_n$ y tomando $1/r$ como razón común en vez de r. Así, para la progresión invertida,

$$S_n = a_n\frac{(1/r)^n - 1}{(1/r) - 1} = a_n\frac{1 - r^n}{r^{n-1}(1 - r)}.$$

Un conjunto de m números $a_2, \ldots, a_{m+1}$ se llama un conjunto de m *medios geométricos* entre a y b si $a = a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, a_{m+2} = b$ forman una progresión geométrica. Entonces

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

y teniendo en cuenta sólo el caso en que a y b son números reales positivos, r es la raíz $(m + 1)$-ésima positiva de b/a. Los medios son entonces $ar, ar^2, \ldots, ar^m$.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar a_8 y S_8 de una progresión geométrica si $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$.

Solución

$$a_5 = 2(\tfrac{1}{2})^4 = \frac{1}{8}; \qquad a_6 = \frac{1}{16}; \qquad S_5 = \frac{a_6 - a_1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1/16 - 2}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$= 2\left(2 - \frac{1}{16}\right) = 2\,\frac{31}{16} = \frac{31}{8}.$$

II. Hallar a_1 y S_5 de una progresión geométrica si $a_7 = 192$ y $r = 2$.

Solución

$a_7 = a_1 2^6 = 3 \cdot 2^6$, $a_1 = 3$ y $a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$, así que

$$S_5 = 96 - 3 = 93.$$

III. Hallar r de una progresión geométrica si $a_1 = 1/2$ y $S_5 = 31/2$.

Solución

$S_5 = \frac{1}{2}\left(\dfrac{r^5 - 1}{r - 1}\right) = \dfrac{31}{2}$. Evidentemente no se puede esperar resolver la ecuación $r^5 - 1 = 31(r - 1)$, excepto para valores enteros por sustitución y se obtiene $r = 2$ como una solución.

IV. Hallar r y n de una progresión geométrica si $a_1 = 2$, $a_n = -54$, $S_n = -40$.

Solución

$$a_n = 2r^{n-1} = -54,\ r^{n-1} = -27,\ r^n = -27r \text{ y}$$
$$-40(r - 1) = a_1(r^n - 1) = (-27r - 1)2.$$

Entonces $-27r - 1 = -20r + 20$ y $-7r = 21$, $r = -3$, $(-3)^{n-1} = -27$, $n - 1 = 3$, $n = 4$.

EJERCICIOS

1. De una progresión geométrica hallar

(a) S_6, a_6 si $a_1 = 8$, $r = 1/2$ *Resp.:* $S_6 = 63/4$, $a_6 = 1/4$.
(b) S_8, a_8 si $a_1 = 16$, $r = -1/2$
(c) S_6, a_4 si $a_1 = 1/8$, $r = 2$ *Resp.:* $S_6 = 63/8$, $a_4 = 1$.
(d) a_1, S_5 si $a_3 = 1/9$, $r = -1/3$
(e) a_7, S_6 si $a_4 = 1/32$, $r = -1/2$ *Resp.:* $a_7 = -1/256$, $S_6 = 21/128$.
(f) a_9, si $a_4 = 42$, $a_1 = 5\,250$

(g) a_8, si $a_{11} = 1\,080$, $a_{14} = 233\,280$ *Resp.:* $a_8 = 5$.
(h) r, n si $a_1 = 2$, $a_n = 8$, $S_n = 3$
(i) n si $a_1 = -1$, $r = 2$, $S_n = -63$ *Resp.:* $n = 6$.
(j) r, n si $a_1 = 3$, $a_n = 48$, $S_n = 93$

2. Interpolar m medios geométricos entre a y b en los casos siguientes:

(a) $m = 4$, $a = 1$, $b = 32$ *Resp.:* 2, 4, 8, 16.
(b) $m = 5$, $a = 2$, $b = 1/32$
(c) $m = 3$, $a = 18$, $b = 2/9$ *Resp.:* 6, 2, $2/3$.
(d) $m = 7$, $a = 1/27$, $b = 3$
(e) $m = 5$, $a = 2$, $b = 1/4$ *Resp.:* $\sqrt{2}$, 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
(f) $m = 2$, $a = 3$, $b = 41$

6. Progresiones armónicas. Se dice que una sucesión a_1, $a_2 \ldots$ forma una *progresión armónica* si *todos* los números a_i no son ceros y la sucesión de los recíprocos

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \tag{18}$$

es una progresión aritmética. Entonces

$$d = \frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} \tag{19}$$

para cada i y

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}\right) = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2},$$

así que

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}. \tag{20}$$

Los términos de una progresión armónica pueden calcularse mediante esta fórmula, pero es preferible pasar a la correspondiente progresión aritmética y llevar a cabo los cálculos directamente empleando la teoría de las progresiones aritméticas. Véanse los ejemplos ilustrativos correspondientes a este artículo.

No hay fórmula para la suma de n términos de una progresión armónica. Sin embargo, se definen los *medios armónicos* de una manera análoga a como se definen los medios aritméticos. Así, si a y b son dos números cualesquiera no nulos, se puede formar una progresión armónica de $n = m + 2$ términos en la que $a_1 = a$, $a_{m+2} = b$,

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (m+1)d, \qquad d = \frac{a - b}{(m+1)ab}.$$

Los m medios aritméticos entre $1/a$ y $1/b$ entonces se calculan y sus recíprocos son los m medios armónicos entre a y b.

Ejemplos ilustrativos

I. En una progresión armónica hallar a_3, a_{10} si $a_5 = -1/3$, $a_{16} = 1/17$.

Solución

Los elementos $c_5 = -3$, $c_{16} = 17$ forman los términos quinto y sexto de una progresión aritmética en que $d = 2$, por el ejemplo ilustrativo III del artículo 4. Entonces en ese ejemplo $c_1 = -11$ y

$$c_3 = -11 + 2d = -7,$$
$$c_{10} = -11 + 9d = 7.$$

Luego, $a_3 = -1/7$, $a_{10} = 1/7$.

II. Interpolar seis medios armónicos entre $-1/5$ y $1/23$.

Solución

Se forma una progresión aritmética de ocho términos con $a_1 = -5$, $a_8 = 23$. Entonces $23 = -5 + 7d$ y $d = 4$, los medios aritméticos son -1, 3, 7, 11, 15, 19. Los medios armónicos requeridos son -1, $1/3$, $1/7$, $1/11$, $1/15$ y $1/19$.

EJERCICIOS

1. En una progresión armónica hallar

(a) a_2, a_3, a_4 si $a_1 = -1/5$, $a_5 = 1/7$ *Resp.:* $1/2$, 1, $1/4$

(b) a_8, a_9 si $a_7 = 1/13$, $a_{12} = 1/28$

(c) a_6, a_{12} si $a_2 = 1/13$, $a_8 = -1/11$ *Resp.:* $a_6 = -1/3$, $a_{12} = -1/27$.
(d) a_9, a_{11} si $a_3 = 1$, $a_7 = 3$
(e) a_1, a_7 si $a_2 = 3/4$, $a_5 = 3/10$ *Resp.:* $a_1 = 3/2$, $a_7 = 3/14$.
(f) a_{15} si $a_1 = 3/11$, $a_7 = 3/4$
(g) a_{29} si $a_1 = 4/43$, $a_9 = 4/10$ *Resp.:* $-4/41$.

2. Intercalar m medios armónicos entre a y b en los casos siguientes:

(a) $m = 2$, $a = 1$, $b = 3$ *Resp.:* $9/7$, $9/5$.
(b) $m = 5$, $a = 1/3$, $b = 1$
(c) $m = 7$, $a = 1$, $b = 2$
Resp.: $16/15$, $16/14$, $16/13$, $16/12$, $16/11$, $16/10$, $16/9$.
(d) $m = 4$, $a = 3/4$, $b = 3/14$
(e) $m = 11$, $a = 1/20$, $b = 1/7$

3. Describir cada una de las progresiones siguientes por el término apropiado de "aritmético", "geométrico", "armónico", o ninguno de éstos:

(a) $1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8 \ldots$
(b) $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 \ldots$
(c) $1, 1/2, 0, -1/2, -1 \ldots$
(d) $1/3, 1/9, 1/27, 1/81 \ldots$
(e) $1/3, 1/9, 1/12, 1/15 \ldots$
(f) $1/3, 1/9, -1/9, -1/3 \ldots$
(g) $3/4, 1, 4/3, 16/9, 64/27 \ldots$
(h) $3/4, 1, 5/4, 3/2, 7/4 \ldots$
(i) $3, 3/2, 1, 3/4, 3/5, 1/2 \ldots$

CAPITULO VI

ECUACIONES

1. Ecuaciones condicionales. En el estudio de los polinomios hecho hasta aquí se ha considerado que $f(x) = 0$ solamente cuando $f(x)$ es un polinomio nulo. También se ha escrito $f(x) = g(x)$ sólo en aquellos casos en que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios iguales según se establece en el artículo 1 del capítulo IV.

En adelante se adoptarán las notaciones $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv g(x)$ (léase "f de x es idéntico a g de x") para las dos propiedades mencionadas y se darán nuevos significados a nuestras notaciones primitivas.

Si en el polinomio $f(x)$ cuyos coeficientes son números complejos reemplazamos x por el número complejo c, el resultado se denomina el valor de $f(x)$ para $x = c$ y se designa por $f(c)$. Si $f(c)$ es el número complejo cero, c se llamará una *raíz* o un *cero* de $f(x)$. Este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de las raíces de los polinomios, o sea, a las raíces de las llamadas ecuaciones *condicionales* (polinomiales).

Una *ecuación condicional*

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

no es un enunciado sino una pregunta, como sigue: ¿cuáles son los números complejos r tales que $f(r) = 0$? Así se pide: ¿cuáles son las raíces de $f(x)$? Las respuestas a estas preguntas se llaman las *raíces* (o *soluciones*) de la ecuación (condicional). Una respuesta a la fórmula (1) no será completa a menos que se den todas las raíces. Se dice que *se ha resuelto la ecuación de la fórmula* (1) cuando se han hallado *todas* sus raíces.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios en x, la ecuación condicional

$$f(x) = g(x) \tag{2}$$

es también una interrogación: ¿cuáles son los números complejos r tales que $f(r)$ y $g(r)$ son el mismo número complejo? Debe estar bien claro que las respuestas a esta pregunta son precisamente las mismas que las respuestas a la cuestión

$$f(x) - g(x) = 0 \tag{3}$$

donde el primer miembro es la diferencia polinómica definida en el artículo 2 del capítulo IV.

La fórmula (3) puede ser más o menos fácil de resolver que la (2). Se llamarán ecuaciones equivalentes y se dará la siguiente:

Definición. *Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen precisamente las mismas raíces.*

Obsérvese ahora que la ecuación $f(x) = g(x)$ es equivalente a las ecuaciones

$$af(x) = ag(x), \qquad f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \tag{4}$$
$$(a \neq 0)$$

para cualquier número complejo a y para cualquier polinomio $h(x)$. Así, si se multiplican (o dividen) ambos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente. Si se suma (o resta) el mismo polinomio a (de) los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.

El polinomio $f(x)$ se denomina el *primer* miembro y el polinomio $g(x)$ el *segundo* miembro de la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

Ambos son sumas de términos. Cualquier término de un miembro se puede pasar al otro miembro cambiando su signo. El resultado será una ecuación equivalente. Este procedimiento se llama *proceso de transposición* o *traslado de términos*. Este es el procedimiento por medio del cual de la fórmula (2) se deduce la fórmula (3) y es una consecuencia inmediata de la segunda relación de la fórmula (4).

Si un término de $f(x)$, es decir, un sumando, coincide con un término de $g(x)$, ambos términos *se cancelan*, o sea, se tachan. Esta es la consecuencia de la fórmula (4) o del proceso de transposición. Por ejemplo, en la ecuación

$$9x^2 + 5x^3 - 7x^2 + 3x - 8 = 5x^3 + x - 2 + 2x^2,$$

se anula $5x^3$, se suma $9x^2 - 7x^2 = 2x^2$, se tacha $2x^2$, se traslada y se obtiene:

$$3x - x = -2 + 8; \quad 2x = 6; \quad x = 3.$$

2. Grados de una ecuación. Toda ecuación de miembros polinómicos $g(x) = h(x)$ es equivalente a la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es un polinomio. Entonces se puede escribir

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{5}$$

donde $a_0 \neq 0$. El grado n de $f(x)$ se denomina *grado* de la *ecuación* de la fórmula (5), y los coeficientes de $f(x)$ se denominan *coeficientes* de la ecuación. Entonces a_0 es el *primer coeficiente* o *coeficiente inicial* de la ecuación y a_n es el *término constante*. Si se multiplica la ecuación (5) por un número distinto de cero, a, se obtiene una ecuación equivalente, $af(x) = 0$, cuyo primer coeficiente es aa_0 y los otros coeficientes son aa_i. Este procedimiento se emplea usualmente cuando los coeficientes son reales para tener a_0 positivo. En caso de que los coeficientes sean enteros, la ecuación se divide generalmente por su m.c.d.

La ecuación de la fórmula (5) se llama ecuación *lineal* o de *primer grado* si $n = 1$, ecuación *cuadrática* o de *segundo grado* si $n = 2$, ecuación *cúbica* o de *tercer grado* si $n = 3$, ecuación de *cuarto grado* si $n = 4$, ecuación *quíntica* o de *quinto grado* si $n = 5$. Nótese, sin embargo, que una ecuación como

$$0x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = x^3 + 2x^2 - 4x + 6$$

no es una ecuación de cuarto grado, ni cúbica, ni cuadrada, sino que es una ecuación lineal, pues la equivalente a ella es $x - 1 = 0$.

EJERCICIOS ORALES

Díganse los grados, los coeficientes iniciales $a_0 \neq 0$, y los términos constantes de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
(b) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
(c) $(x - 1)^2(2x + 1)^2 = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1$

3. Ecuaciones lineales. Una *ecuación lineal* es una ecuación $f(x) = g(x)$ en la que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios cuya diferencia es un polinomio lineal $ax + b$. Así, $f(x) = g(x)$ es equivalente en este caso a

(6) $$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$$

o bien, a $ax = -b$, y a

(7) $$x = \frac{-b}{a}.$$

De donde se sigue que las ecuaciones lineales tienen una solución única que es la dada por la fórmula (7).

El procedimiento ordinario para la resolución de las ecuaciones lineales más complicadas consiste en trasladar al primer miembro de la ecuación *todos los términos que contienen a x como factor*, y al segundo *todas las constantes*. Entonces la ecuación se puede escribir en la forma

(8) $$cx = d,$$

en donde d es una constante, y será una ecuación lineal sólo si c es una constante *distinta de cero*. Luego, la única solución será $x = d/c$.

Ejemplos ilustrativos

Resolver la ecuación

$$ay^2x + y^3 - 2ay + 2ax = ayx - 4ay + 2a + ax + 2ay^2 + y - 1$$

para x.

Nota: Se presenta este ejemplo como una ilustración del procedimiento de traslado o transposición de términos de uno al otro miembro. Ejercicios de este tipo se pueden encontrar en libros de álgebra elemental. Aquí tienen escaso valor y no se darán.

Solución

Se trasladan al primer miembro todos los términos en x y al segundo todos los que no la contienen, con lo cual se obtiene $(ay^2 + 2a - ay - a)x = -y^3 + 2ay - 4ay + 2a + 2ay^2 + y - 1$, y la solución es

$$x = \frac{y^2(2a-1) - y(2a-1) + (2a-1)}{a(y^2 - y + 1)} = \frac{2a-1}{a}.$$

EJERCICIOS ORALES

Ejercitarse hasta llegar a resolver con gran rapidez las ecuaciones siguientes:

(*a*) $2x + 3 = 0$	(*e*) $3x - 4 = 5x - 2$
(*b*) $3x + 4 = 0$	(*f*) $8x^2 + 4x - 3 = 8x^2 + 2x - 11$
(*c*) $2x - 4 = 0$	(*g*) $(x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 4x + 5$
(*d*) $2x - 3 = x - 4$	(*h*) $2ax + 3a = 3x + 2a^2$

4. Ecuaciones cuadráticas. Una ecuación es cuadrática si es equivalente a la siguiente:

$$(9) \qquad f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

donde, en este simple caso, se usó la notación a, b, c para los coeficientes, en vez de a_0, a_1, a_2. Las ecuaciones cuadráticas se resuelven usando la identidad polinómica

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

donde, si se sustituye y por $\frac{t}{2}$ se obtiene

$$(10) \qquad x^2 + tx + \frac{t^2}{4} = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2.$$

Obsérvese el siguiente principio:

COMPLETAR EL CUADRADO. *La expresión* $x^2 + tx$ *se convierte en cuadrado perfecto si se le suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x. *El resultado de esta operación es el cuadrado completo de* x *más la mitad de su coeficiente.*

Una ecuación cuadrática cualquiera se puede resolver por lo tanto, escribiendo

$$f(x) \equiv a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Efectuando operaciones,

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2},$$

y usando la identidad $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ se tiene

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right]$$
$$= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Entonces

$$f(x) \equiv a(x - r_1)(x - r_2), \tag{11}$$

donde

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{12}$$

Supóngase que r es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Entonces $f(r) = a(r - r_1)(r - r_2) = 0$. Pero para que el producto de números complejos sea nulo, al menos uno de los factores deberá ser cero. Por lo tanto, $r = r_1$ o $r = r_2$. Sustituyendo,

$$f(r_1) = a(r_1 - r_1)(r_1 - r_2) = 0,$$
$$f(r_2) = a(r_2 - r_1)(r_2 - r_2) = 0.$$

Por lo tanto, r_1 y r_2 son las *únicas* raíces de la ecuación cuadrática.

La fórmula (12) que da las dos raíces de la ecuación de la fórmula (9) se llama *fórmula cuadrática* y reduce el problema de hallar las raíces de una ecuación cuadrática al de hallar la raíz cuadrada de

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

y a procesos racionales. Δ se llama el *discriminante* de la ecuación de la fórmula (9). Nótese que

$$(13) \qquad (r_1 - r_2)^2 = \frac{\Delta}{a^2},$$

y que la ecuación de la fórmula (9) tiene raíces iguales y del mismo signo si y solamente si $\Delta = 0$.

Si a, b y c son números reales, Δ también lo será. Si Δ es positivo, su raíz cuadrada, $\sqrt{\Delta}$, es un número real positivo perfectamente bien definido y r_1 y r_2 son distintos y reales. Cuando Δ es negativo, se puede escribir

$$\Delta = -\Lambda, \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{\Lambda}i,$$

donde $\sqrt{\Lambda}$ es positivo y las raíces

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Lambda}}{2a}i, \qquad r_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{2a}i$$

son un par de números imaginarios conjugados.

Si a, b y c son números complejos, Δ puede ser un número imaginario, pero todavía no se ha estudiado el significado de $\sqrt{\Delta}$, que se verá en el artículo 7 del capítulo VIII.

Nótese que

$$(14) \qquad r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a},$$

y que estas relaciones se pueden obtener mediante la aplicación de la fórmula (12), o bien de la identidad

$$a(x-r_1)(x-r_2) = a[x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2]$$
$$=ax^2+bx+c.$$

Se terminará el estudio de las ecuaciones cuadráticas con la demostración del teorema de la irreducibilidad.

Teorema 1. *Un polinomio* $\mathrm{f(x)} \equiv \mathrm{ax^2+bx+c}$ *con coeficientes reales es irreducible en el campo de todos los números reales si y solamente si* $\Delta = \mathrm{b^2-4ac} < 0$.

Anteriormente se demostró que se puede factorizar $f(x)$ si $\Delta \geqq 0$ como un producto $a(x-r_1)(x-r_2)$, donde r_1 y r_2 son reales. Si $\Delta < 0$ y $f(x)$ no es irreducible, se puede factorizar $f(x) = (gx+h)(sx+t)$, donde g, h, s, t son reales y $sg = a \neq 0$. Entonces, $r_1 = -h/g$, $r_2 = -t/s$ son raíces reales de $f(x)$ contrariamente a la demostración de que $f(x)$ tiene un par de números conjugados imaginarios como únicas raíces.

Existen fórmulas para resolver las ecuaciones cúbicas y cuartas, pero no son de gran utilidad y no se estudiarán aquí.

Ejemplos ilustrativos

I. Resolver la ecuación $2x^2-4x+8 = 5x^2+2x-5$.

Solución

Esta ecuación es equivalente a $3x^2+6x=13=0$ y $a=3$, $b=6$, $c=-13$, $b^2-4ac = 36+12\cdot 13 = 12\cdot 16 = 3\cdot 4\cdot 16 = 8^2\cdot 3$.

Las raíces son

$$\frac{-6\pm 8\sqrt{3}}{6} = -1 \pm \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

II. Determinar k de manera que la ecuación $9kx^2-60x+6k+1=0$ tenga raíces iguales.

Solución

El discriminante es

$$b^2-4ac = 3600-4\cdot 9k(6k+1) = 36(100-6k^2-k).$$

La ecuación $6k^2 + k - 100 = 0$ tiene como raíces

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{12} = \frac{-1 \pm 49}{12} = 4, \frac{-25}{6}.$$

El valor de $k = 4$ da la ecuación $36x^2 - 60x + 25 = (6x^2 - 5)^2 = 0$, y el valor de $k = -25/6$ da la ecuación $-75/2x^2 - 60x - 24 = 0$, que es equivalente a $25x^2 + 40x + 16 = (5x^2 + 4)^2 = 0$.

EJERCICIOS ORALES

1. ¿Cuáles son las sumas y los productos de las raíces de las siguientes ecuaciones?

(*a*) $x^2 - 3x + 27 = 0$
(*b*) $x^2 + 3x - 27 = 0$
(*c*) $2x^2 + 4x - 27 = 0$
(*d*) $3x^2 + 12x + 8 = 0$
(*e*) $(1 + \sqrt{2})x^2 + x + \sqrt{2} = 0$
(*f*) $ix^2 - x + \sqrt{-3} = 0$
(*g*) $(i + 1)x^2 - x = 0$
(*h*) $\sqrt{3}x^2 - 9 = 0$

2. Dar el discriminante de cada una de las ecuaciones (*a*) a (*d*) del ejercicio oral 1.

EJERCICIOS

1. Dar la forma radical de las soluciones de todas las ecuaciones del ejercicio oral 1.

2. Resolver las ecuaciones siguientes aplicando la fórmula cuadrática:

(*a*) $x^2 + 2x - 63 = 0$
(*b*) $x^2 - 9x - 52 = 0$
(*c*) $x^2 + 6x - 40 = 0$
(*d*) $x^2 - 6x - 40 = 0$
(*e*) $x^2 + x + 4 = 0$
(*f*) $x^2 - x - 24 = 0$
(*g*) $3x^2 + 2x - 5 = x^2 - 4x + 1$
(*h*) $\frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} - 84 = 0$
(*i*) $\frac{10}{x^2} + \frac{29}{x} - 21 = 0$
(*j*) $(x + 1)^2(x - 1) = x^3 - 3x + 8$
(*k*) $2(x - 1)^2 = (2x + 1)(x + 1)^2 + 3x - 5$
(*l*) $12x^2 + 4x - 1 = 0$
(*m*) $x^2 = 10x + 75$

3. Determinar k de manera que cada una de las ecuaciones siguientes tenga dos raíces iguales:

(a) $2kx^2 - 6x + 9 = 0$
(b) $kx^2 - 14x + k + 3 = 0$
(c) $kx^2 - 12kx + 9k + 2 = 0$
(d) $kx^2 + kx + 1 = 0$
(e) $(2k + 1)x^2 - 2(k + 2)x + k = 0$
(f) $(4k - 8)x^2 + 4kx + (k + 3) = 0$

4. Hallar k si 2 es raíz de $k^2x^2 + x - 9k = 0$.
5. Hallar k si 1 es raíz de $2kx^2 + k^2x - 15 = 0$.

5. Los teoremas del residuo y del factor. Si c es un número, el residuo de la división del polinomio $f(x)$ entre el polinomio lineal $x - c$ es un número. Su valor está dado por el siguiente:

Teorema del residuo. *El residuo de la división de* $f(x)$ *entre* $x - c$ *es* $f(c)$.

Del algoritmo de la división se establece que

$$f(x) = q(x) \cdot (x - c) + r.$$

Luego $f(a) = q(a) \cdot (a - c) + r$ para cualquier número a. En particular, $f(c) = q(c) \cdot (c - c) + r = r$.

Hay una consecuencia casi automática de las definiciones y del teorema del residuo, que se expresa con el siguiente:

Teorema del factor. *Un número* c *es una raíz de* $f(x)$ *si y solamente si* $x - c$ *es un factor de* $f(x)$.

Por el teorema del residuo

$$f(x) = (x - c) \cdot q(x) + f(c) \tag{15}$$

para cualquier c. La hipótesis de que c es una raíz de $f(x)$ significa que $f(c) = 0$ y, así, que $f(x) = (x - c) \cdot q(x)$, $x - c$ es un factor de $f(x)$. La hipótesis de que $x - c$ es un factor de $f(x)$ significa que $f(x) = (x - c) \cdot q(x)$ y se concluye que $f(c) = 0$, ya sea por la fórmula (15) y por la unicidad del residuo en el algoritmo de la división, o bien calculando

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) = 0.$$

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular el residuo de la división de $x^{72} - 7x^{48} + 1$ entre $x + 1$.

Solución

El residuo es $f(-1) = 1 - 7 + 1 = -5$

II. Demostrar que $x + 2$ es un factor de

$$x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 2x - 12.$$

Solución

$$f(-2) = -32 + 112 - 64 - 4 - 12 = 0.$$

EJERCICIOS ORALES

1. Decir por qué $x - r$ es factor de $f(x)$ en los casos siguientes:

(a) $r = -1,\ f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 4$
(b) $r = 1,\ f(x) = x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 10x + 16$
(c) $r = -2,\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$
(d) $r = 3,\ f(x) = x^3 - x^2 - 4x -$
(e) $r = 2,\ f(x) = x^3 - x - 6$
(f) $r = -4,\ f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 4$
(g) $r = 3,\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

2. Dar el residuo de las siguientes divisiones:

(a) $x^3 - 3x^2 - 3x - 3$ entre $x + 1$
(b) $x^3 + x^2 + 5x + 7$ entre $x + 2$
(c) $x^5 + 6x^4 - 7x^2 + 2x - 1$ entre $x - 1$
(d) $x^3 - x^2 - 3x + 1$ entre $x - 3$
(e) $x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ entre $x + 4$
(f) $x^3 - x - 3$ entre $x - 2$

6. División sintética. Si c es un número cualquiera y

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

es un polinomio cualquiera, se puede escribir

$$f(x) = q(x)(x - c) + b_n,$$

donde

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{r-2} + \ldots + b_{n-1}, \qquad b_n = f(c).$$

Luego $(x - c)q(x) = f(x) - b_n = xq(x) - cq(x)$, o sea que $xq(x) + b_n = f(x) + cq(x)$, es decir, $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) + cb_0x^{n-1} + cb_1x^{n-2} + \ldots + cb_{n-1}$.

Comparando coeficientes se tiene

$$b_0 = a_0, \qquad b_1 = a_1 + cb_0, \ldots, \qquad b_i = a_i + cb_{i-1}, \ldots, \qquad b_n = a_n + cb_{n-1}.$$

Entonces los coeficientes $b_0, \ldots, b_{n-1}$ del cociente $q(x)$ y del residuo b_n, se pueden calcular con una tabla

$$\begin{array}{ccccccccccc|l} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + \ldots + & a_{n-1} & + & a_n & & & c \\ & + & ca_0 & + & cb_1 & + \ldots + & cb_{n-2} & + & cb_{n-1} & & & \\ \hline b_0 & + & b_1 & + & b_2 & + \ldots + & b_{n-1} & + & b_n & & & \end{array}$$

Este procedimiento es una modificación del proceso ordinario de la división, y se llama *división sintética*. No es aplicable, sin disposiciones especiales, para la división de un polinomio entre divisores diferentes de los de la forma $x - c$.

La división sintética se puede emplear para calcular $f(c)$ cuando la sustitución directa de x por c pueda resultar tediosa. Por ejemplo, si $f(x) = x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 100x - 31$, el cálculo de $f(8) = 8^4 - 7(8)^3 + 5(8)^2 - 800 - 31$ es complicado. Pero la división sintética

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -7 & +5 & -100 & -31 & 8 \\ & +8 & +8 & +104 & +32 & \\ \hline 1 & +1 & +13 & +4 & +1 & \end{array}$$

da $f(8) = 1$.

Si c es una raíz de $f(x)$, el cálculo de $f(c)$ por medio de la división sintética da el valor $f(c) = 0$ lo mismo que el cociente

$q(x)$ en $f(x) = (x - c)q(x)$. Entonces las raíces restantes de $f(x)$ son las raíces de la ecuación $q(x) = 0$. Esta ecuación de grado $n - 1$ se denomina *ecuación rebajada.*

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular el cociente y el residuo de la división de

$$3x^4 + 14x^3 - 22x^2 - 50 \text{ entre } x + 6.$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 3 + 14 - 22 + 0 - 50 & \underline{-6} \\ - 18 + 24 - 12 + 72 & \\ \hline 3 - 4 + 2 - 12 + 22 & \end{array}$$

El cociente es $3x^3 - 4x^2 + 2x - 12$ y el residuo es $+22$.

II. Verificar que 8 es una raíz de la ecuación

$$x^4 - 60x^2 - 29x - 24.$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 1 + 0 - 60 - 29 - 24 & \underline{8} \\ + 8 + 64 + 32 + 24 & \\ \hline 1 + 8 + 4 + 3 + 0 & \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Usar la división sintética para calcular el cociente y el residuo de las divisiones siguientes:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ entre $x - 2$

(b) $x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 49x - 36$ entre $x + 2$

Resp.: $q(x) = x^3 - 16x^2 + 34x - 19$, $r = 2$.

(c) $x^4 + x^3 + x - 2$ entre $x + 3$

(d) $x^5 - x^3 - 32x$ entre $x - 3$

Resp.: $q = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 24x + 40$, $r = 120$.

(e) $3x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ entre $x + 2$

(f) $x^7 - 6x^5 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 1$ entre $x + 1$

Resp.: $q = x^6 - x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x - 1$, $r = 2$.

(g) $x^4 + 10x^3 + 22x^2 - 7x + 5$ entre $x + 4$

(h) $x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 32$ entre $x - 4$

Resp.: $q = x^3 + 5x^2 - 2x + 7$, $r = -4$.

(*i*) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 13x - 21$ entre $x + 3$

(*j*) $2x^4 + 9x^3 + 14x + 8$ entre $x + \frac{1}{2}$

Resp.: $q = 2x^3 + 8x^2 - 4x + 16$, $r = 0$.

(*k*) $6x^4 + 5x^3 + 10x - 4$ entre $x - \frac{1}{2}$

(*l*) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 17x - 6$ entre $x - \frac{1}{3}$

Resp.: $q = 3x^3 + 6x^2 + 3x + 18$, $r = 0$.

(*m*) $3x^4 - 14x^3 - 57x^2 + 65x - 56$ entre $x - 7$

(*n*) $3x^4 + 40x^3 + 85x^2 + 97x + 99$ entre $x + 11$

Resp.: $q = 3x^3 + 7x^2 + 8x + 9$, $r = 0$.

(*o*) $x^6 - 81x^4 - 2x^3 + 18x^2 + 8x - 72$ entre $x - 9$

(*p*) $18x^5 + 20x^4 + 29x^3 + 57x^2 + 6x$ entre $x + \frac{1}{9}$

Resp.: $q = 9(2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x)$, $r = 0$.

(*q*) $x^3 - 3x^2 + 16x - 44$ entre $x - \frac{1}{10}$

(*r*) $x^3 + 0.4x^2 - 0.18x + 0.33$ entre $x - 0.2$

Resp.: $q(x) = x^2 + 0.6x - 0.06$, $r = 0.318$.

(*s*) $x^3 - 0.2x^2 + 0.31x - 0.424$ entre $x - 0.9$

2. Demostrar por medio de la división sintética que

(*a*) $(x - 2)^2$ es un factor de $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

(*b*) $(x + 3)^2$ es un factor de $x^4 - 17x^2 + 6x + 90$

(*c*) $(x + 1)^3$ es un factor de $2x^5 + 6x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x - 1$

(*d*) $(x - 5)^2$ es un factor de $x^3 - 75x + 250$

(*e*) $(x + 4)^3$ es un factor de $x^6 + 8x^5 - 128x - 256$

7. Descomposición en factores lineales. Hay un teorema, denominado *teorema fundamental del álgebra*, que establece que *todo polinomio $f(x)$ con coeficientes números complejos tiene una raíz compleja*. La demostración de este teorema es una parte complicada de las matemáticas avanzadas y ni siquiera será sugerida aquí. Como resultado de este teorema y el del teorema del factor se tiene que todo polinomio $f(x)$ con coeficientes complejos tiene un factor lineal $x - c$ donde c es un número complejo. Se enunciará este resultado en la forma siguiente:

Teorema 2. *Los únicos polinomios que son irreducibles en el campo de los números complejos son los polinomios lineales.*

Se puede aplicar en seguida la teoría de la descomposición de polinomios como productos de factores irreducibles. El teorema 2 establece que los factores son lineales y, ya que cualquier polinomio lineal $ax + b = a(x - r)$, donde $r = -b/a$, se puede hacer que los factores sean polinomios $x - r_i$. Si r es cualquier raíz de $f(x)$, entonces $f(x) = (x - r)q(x)$ y se tiene así una descomposición de $f(x)$ en que $x - r$ es uno de los factores lineales. Sin embargo, los factores (lineales) $x - r_i$ de $f(x)$ son únicos, como se demostró en el artículo 9 del capítulo IV. Por lo tanto, r es uno de los r_i. Por el teorema del factor, si $x - r_i$ es un factor de $f(x)$, entonces r_i es la raíz de $f(x)$. Combinando estos resultados se tiene:

Teorema 3. *Sea* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *donde* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *son números complejos,* $n > 0$, $a_0 \neq 0$. *Entonces*

$$(16) \qquad f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n),$$

donde $r_1, \ldots, r_n$ *son números complejos, raíces de* $f(x)$. *Los factores* $x - r_i$ *son únicos, excepto por el orden en la descomposición anterior.*

Si r es una raíz de $f(x)$ y en la factorización (16) de $f(x)$ aparece $(x - r)$ m veces, entonces $f(x)$ es divisible por $(x - r)^m$, pero no por $(x - r)^{m+1}$. Entonces r se llama raíz de *multiplicidad* m del polinomio $f(x)$ y de la ecuación $f(x) = 0$. Si $m = 1$, r se llama raíz *simple;* si $m = 2$, *doble;* y *triple* si $m = 3$.

EJERCICIOS ORALES

Hallar las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones con sus respectivas multiplicidades:

(a) $(x - 3)^3(x + 2)^2x = 0$
(b) $(x + 3)^2(x - 2)^4(x - 1)(x + 1) = 0$
(c) $(x + 2)^4(x^2 - 4)^3(x - 2)^6 = 0$
(d) $(x^2 + 3x + 2)^4(x + 2) = 0$
(e) $(x^2 - 4)^3(x^2 + x)^2(x^2 + 2x + 1)^2 = 0$
(f) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x) = 0$
(g) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4(x^5 - x^4)(x^3 + x^2) = 0$

8. Expresión de los coeficientes en función de las raíces. La forma factorizada del polinomio

$$(17) \qquad f(x) \equiv x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$$

que tiene el primer coeficiente unitario es:

$$(18) \qquad f(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n),$$

donde $r_1, r_2 \ldots r_n$ son las raíces de $f(x)$. Se puede efectuar el producto de la forma factorizada y comparar los coeficientes así obtenidos de la fórmula (18) con los de la fórmula (17). No se darán los detalles de este argumento, y se recomienda que el estudiante los lleve a cabo para $n = 3, 4$. Los resultados se pueden expresar por las fórmulas

$$\begin{aligned}
&r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -c_1, \\
(19) \qquad &r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n = c_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&r_1 r_2 \ldots r_i + r_1 r_2 \ldots r_{i-1} r_{i+1} + \ldots \\
&\qquad + r_{n-(i-1)} r_{n-(i-2)} \ldots r_n = (-1)^i c_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&r_1 r_2 \ldots r_n = (-1)^n c_n.
\end{aligned}$$

Así, la *suma de las raíces de* f(x) *es igual al coeficiente* c_1 *de* x^{n-1} *con signo opuesto*. La suma de todos los productos distintos posibles de dos raíces es $(-1)^2 c_2$. La suma de todos los productos distintos posibles de i raíces es $(-1)^i c_i$. Sólo existe un producto de n raíces y es igual a $(-1)^n c_n$.

Para el caso $n = 2$ estas relaciones ya se escribieron. Para $n = 3$ son

$$r_1 + r_2 + r_3 = -c_1,$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = c_2,$$
$$r_1 r_2 r_3 = -c_3,$$

y para $n = 4$ son

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -c_1,$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = c_2,$$
$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -c_3, \qquad r_1 r_2 r_3 r_4 = c_4.$$

Las relaciones dadas parten de la hipótesis de que el coeficiente inicial de $f(x)$ sea 1. Si no es así, se puede escribir

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv a_0(x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n),$$

donde los coeficientes c_i son los cocientes.

$$c_i = \frac{a_i}{a_0}.$$

Las raíces de $f(x)$ son las mismas que las de

$$x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n,$$

y así se pueden obtener los coeficientes c_i en función de las raíces de $f(x)$. Entonces $f(x)$ queda determinado por sus raíces si se fija a_0.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar la ecuación con coeficiente inicial uno, cuyas raíces son $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$.

Solución

Sea $r_1 = -1 + \sqrt{3}$, $r_2 = -1 - \sqrt{3}$, $r_3 = 2$. Entonces $r_1 + r_2 = -2$, $r_1r_2 = (-1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$, $(r_1 + r_2) + r_3 = -2 + 2 = 0$,
$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = r_1r_2 + (r_1 + r_2)r_3 = -2 + (-2)2 = -6$,
$(r_1r_2)r_3 = (-2)2 = -4$.
La respuesta es $x^3 - (0)x^2 + (-6)x - (-4) \equiv x^3 - 6x + 4 = 0$.

II. Hallar la ecuación cuyo primer coeficiente sea 1 y cuyas raíces sean $-3 + \sqrt{2}, -3 - \sqrt{2}, 2 + i, 2 - i$.

Solución

Si $r_1 = -3 + \sqrt{2}$, $r_2 = -3 - \sqrt{2}$, $r_3 = 2 + i$, $r_4 = 2 - i$, se tiene $r_1 + r_2 = -6$, $r_1r_2 = 7$, $r_3 + r_4 = 4$, $r_3r_4 = 5$. Entonces

$$-c_1 = (r_1 + r_2) + (r_3 + r_4) = -2,$$
$$c_2 = r_1r_2 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_3r_4 = 7 - 24 + 5 = -12,$$

$-c_3 = r_1r_2(r_3 + r_4) + (r_1 + r_2)r_3r_4 = 7 \cdot 4 - 6 \cdot 5 = -2,$
$c_4 = (r_1r_2)(r_3r_4) = 35.$

Resp.: $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 2x + 35 = 0.$

EJERCICIOS ORALES

1. Dar la suma y el producto de las raíces de las ecuaciones siguientes:

(*a*) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
(*b*) $2x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$
(*c*) $3x^3 + 4x - 18 = 0$
(*d*) $2x^4 + 2x^3 + 7x = 0$
(*e*) $(x^3 - 2x^2 + 1)(x + 3) = 0$
(*f*) $(x^3 - 4x^2 + 3)(x^2 - 2) = 0$
(*g*) $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x - 7) = 0$
(*h*) $(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 2x^2 + 5)(x^3 - 3x^2 + 6) = 0$

2. La suma de dos de las raíces del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ es 3. ¿Cuál es la tercera raíz?

3. El producto de dos de las raíces de la ecuación

$$2x^3 + x^2 - 11x - 10 = 0$$

es 2. ¿Cuál es la tercera raíz?

EJERCICIOS

Usense las relaciones entre raíces y coeficientes para hallar el polinomio $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ cuyas raíces son

(*a*) $-3,\ 1 + \sqrt{-3},\ 1 - \sqrt{-3}$
(*b*) $4,\ -2 + \sqrt{-5},\ -2 - \sqrt{-5}$
(*c*) $5,\ -5/2 + \sqrt{2},\ -5/2 - \sqrt{2}$
(*d*) $-2,\ 1/2 + \sqrt{-3/2},\ 1/2 - \sqrt{-3/2}$
(*e*) $1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3},\ -2\sqrt{-2},\ -2 - \sqrt{-2}$
(*f*) $1 + 2i,\ 1 - 2i,\ 2 - 3i,\ 2 + 3i$
(*g*) $2i - 1,\ -2i - 1,\ \sqrt{2} - 1,\ -\sqrt{2} - 1$
(*h*) $0,\ 3i + 2,\ -3i + 2,\ -2 + \sqrt{5},\ -2 - \sqrt{5}$

9. Raíces imaginarias de polinomios reales. Si r es una raíz compleja del polinomio con coeficientes reales $f(x)$, la expresión $x-r$ es un factor de $f(x)$. Cuando r es real y el grado de $f(x)$ es mayor que 1, el polinomio $f(x)$ no puede ser irreducible en el campo de todos los números reales. Supóngase en seguida que r es imaginario y que se escribe así

$$r = s + ti,$$

donde s y t son reales, $t \neq 0$, $i^2 = -1$. Entonces

$$\bar{r} = s - ti$$

es el conjugado imaginario, y

$$g(x) = (x-r)(x-\bar{r}) = x^2 - 2sx + s^2 + t^2 \tag{20}$$

tiene coeficientes reales. Aplicando el algoritmo de la división se puede escribir

$$f(x) = q(x)g(x) + ax + b.$$

Ya que $f(x)$ y $g(x)$ tienen coeficientes reales, también los tendrá el residuo $ax+b$. Pero

$$f(r) = q(r)g(r) + ar + b = ar + b = 0$$

pues $f(r) = g(r) = 0$. Entonces o bien $a = b = 0$ y $g(x)$ divide a $f(x)$, o $a \neq 0$, $r = -b/a$ es real. Esto es contrario a la hipótesis, y se demostró el siguiente:

Lema. *Sea* r *una raíz imaginaria de* f(x). *Entonces* $\bar{\mathrm{r}}$ *es una raíz imaginaria de* f(x) *y además* $(\mathrm{x}-\mathrm{r})(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{r}})$ *es un factor de* f(x).

Como consecuencia del lema se ve que todo polinomio real (es decir, un polinomio con coeficientes reales) tiene un factor real lineal o un factor real cuadrático. Del teorema 1 se puede establecer el siguiente:

Teorema 4. *Un polinomio real es irreducible si y solamente si es lineal o cuadrático* $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ *con* $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} < 0$.

Aplicando ahora el teorema de factorización del artículo 9 del capítulo IV al teorema 4 se obtiene el siguiente:

Teorema 5. *Todo polinomio real se puede expresar únicamente, excepto por el orden y por los factores constantes, como un producto de factores reales lineales y reales cuadráticos irreducibles. Las raíces de los factores reales lineales son las raíces reales de* $f(x)$, *y las raíces de los factores cuadráticos son parejas de raíces imaginarias conjugadas de* $f(x)$.

Si r es una raíz imaginaria de multiplicidad m de $f(x)$, el polinomio correspondiente $(x-r)(x-\bar{r})$ debe encontrarse exactamente m veces en la factorización de $f(x)$. Luego $\bar{r}$ tiene también multiplicidad m.

Teorema 6. *Sean* a *y* $b \neq 0$ *reales y* $a + bi$ *una raíz de multiplicidad* m *del polinomio real* $f(x)$. *Entonces* $a - bi$ *es una raíz de multiplicidad* m *de* $f(x)$.

EJERCICIOS ORALES

1. El número $3 + 2i$ es raíz de la ecuación

$$x^3 - 9x^2 + 31x - 39 = 0.$$

¿Cuáles son las demás raíces?

2. Si $2 - 3i$ es una raíz de $x^3 + x^2 + bx + c = 0$, ¿cuáles son las demás raíces y cuál es el valor de c?

3. Sea $2 + i$ una raíz doble de $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 25 = 0$. ¿Cuáles son las otras raíces y cuál es el valor de a?

4. Dar la forma factorizada de la ecuación de sexto grado con coeficientes reales, y con $2 - \sqrt{-3}$ como raíz doble y $1 + i$ como raíz simple.

10. Raíces múltiples (CURSO COMPLETO). Se puede calcular la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ y el m.c.d. $d(x)$ de $f(x)$ y $f'(x)$. Las raíces del factor $d(x)$ de $f(x)$ son raíces de $f(x)$, y el artículo 13 del capítulo IV implica que si r es una raíz de multiplicidad m de $f(x)$, entonces es raíz de multiplicidad $m - 1$ de $d(x)$. Cuando $d(x) = 1$, el polinomio $f(x)$ no tiene raíces múltiples. De otra manera se pueden encontrar las raíces múltiples de $f(x)$ resolviendo la ecuación $d(x) = 0$.

Un polinomio no constante $f(x)$, que es irreducible en el campo F de los números que contienen sus coeficientes, se factoriza en el campo de todos los números complejos, pero no tiene raíces múltiples. Ya que $f'(x)$ no es el polinomio cero y tiene coeficientes en F, lo mismo ocurre con $d(x)$; $d(x)$ divide a $f'(x)$ y tiene a lo sumo el grado $m - 1$. Entonces $d(x)$ no es un múltiple constante de $f(x)$ y sólo puede dividir a $f(x)$ si es una constante.

Aplíquese el procedimiento anterior a cualquier polinomio quíntico $f(x)$ con raíz de multiplicidad $m > 1$. Si $f(x)$ tiene sólo una raíz múltiple r y ésta es una raíz doble, entonces el polinomio $d(x) = x - r$, $(x - r)^2$ es un factor de $f(x) = (x - r)^2 q(x)$. Entonces el problema de resolver la ecuación $f(x) = 0$ se reduce a la resolución de la ecuación cúbica $q(x) = 0$. Si $f(x)$ tiene dos raíces dobles o una raíz triple, el polinomio $d(x)$ es cuadrático y se puede resolver por la fórmula cuadrática. Esta determina tres (o cuatro) raíces de $f(x)$ y la determinación de las dos raíces restantes es cuestión trivial. Cuando $f(x)$ tiene una raíz doble y una raíz triple, o una raíz de multiplicidad cuatro o cinco, el polinomio $d(x)$ es de grado tres o cuatro y tiene una raíz múltiple. La ecuación $d(x) = 0$ se puede resolver por inspección o por el procedimiento de las derivadas, y la solución de $f(x) = 0$ se puede completar dividiendo $f(x)$ entre $d(x)$ o comparando coeficientes y raíces.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar las raíces de $f(x) = x^4 - 24x^2 + 64x - 48$.

Solución

$$f'(x) = 4x^3 - 48x + 64 = 4(x^3 - 12x + 16).$$

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x + 4 & x \\
\hline
x^2 - 4x + 4 & x^3 \qquad - 12x + 16 & x^4 - 24x^2 + 64x - 48 \\
 & \underline{x^3 - 4x^2 + 4x} & \underline{x^4 - 12x^2 + 16x} \\
 & \qquad 4x^2 - 16x + 16 & \quad - 12x^2 + 48x - 48 \\
 & \qquad \underline{4x^2 - 16x + 16} & = -12(x^2 - 4x + 4)
\end{array}$$

$$d(x) = x^2 - 4x + 4$$
$$= (x-2)^2$$
$$f(x) = (x-2)^3(x-r), \qquad (-8)(-r) = -48, \qquad r = -6.$$

Resp.: 2 es raíz triple; —6 es raíz simple.

11. Hallar las raíces de $x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8$.

Solución

$$f'(x) = 5x^4 - 21x^2 - 4x + 12.$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
 & 7x+10 & 35x-15 & x \\
\hline
 & & 5x^4-21x^2-4x+12 & 5x^5-35x^3-10x^2+60x+40 \\
x^2-x-2 & 7x^3+3x^2-24x-20 & 245x^4+0x^3-1029x^2-196x+588 & 5x^5-21x^3-4x^2+12x \\
 & 7x^3-7x^2-14x & 245x^4+105x^3-840x^2-700x & -14x^3-6x^2+48x+40 \\
 & 10x^2-10x-20 & -105x^3-189x^2+504x+588 & =-2(7x^3+3x^2-24x-20) \\
 & 10x^2-10x-20 & -105x^3-45x^2+360x+300 & \\
 & & -144x^2+144x+288 & \\
 & & =144(x^2-x-2) &
\end{array}$$

$$d(x) = x^2 - x - 2$$
$$= (x-2)(x+1).$$
$$f(x) = (x-2)^2(x+1)^2(x-r), \qquad (-2)^2 1^2(-r) = 8, \qquad r = -2.$$

Resp.: Raíces dobles: 2, —1. Raíz simple: 2.

EJERCICIOS

Cada una de las siguientes ecuaciones tiene al menos una raíz múltiple. Usese esta propiedad para resolverlas.

(a) $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$

(b) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + 8 = 0$

Resp.: $1, 1, -2 + 2i, -2 - 2i.$

(c) $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 = 0$

(d) $x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$

Resp.: $-2, -2, -2, 2.$

(e) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

Resp.: $1, 1, -2, -2.$

(f) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$

(g) $x^5 + 10x^2 + 15x + 6 = 0$

Resp.: $-1, -1, -1, \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-15}.$

(h) $x^5 + 80x^2 + 240x + 192 = 0$

(i) $x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 4x = 0$

(j) $x^6 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 = 0$

CAPITULO VII

RAICES REALES DE ECUACIONES REALES

1. Transformaciones de polinomios. Los métodos principales que se usan en el estudio de las raíces reales de ecuaciones $f(x) = 0$ consisten en ciertas transformaciones que reemplazan un polinomio.

$$(1) \qquad f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$$

por un polinomio $g(x)$ cuyas raíces están relacionadas con las de $f(x)$ en cierta forma prescrita. Se probará primero el siguiente:

Teorema 1. *Sean* $g(x) \equiv f(x+a)$ *y* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *las raíces de* $f(x)$. *Entonces* $r_1-a, r_2-a, \ldots, r_n-a$ *son las raíces de* $g(x)$.

En efecto,

$$f(x+a) \equiv a_0(x+a-r_1)(x+a-r_2)\ldots(x+a-r_n).$$

Pero $x+a-r_i \equiv x-(r_i-a)$, y

$$g(x) \equiv a_0(x-s_1)\ldots(x-s_n)$$

en donde $s_i \equiv r_i - a$.

Los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$ de

$$g(x) \equiv a_0(x+a)^n + a_1(x+a)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x+a) + a_n \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

pueden calcularse mediante el proceso de la división sintética repetida. Obsérvese que debido al hecho de que $f(x+a) \equiv g(x)$, se tiene

$$g(x-a) \equiv f(x) \equiv b_0(x-a)^n + b_1(x-a)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(x-a) + b_n.$$

Entonces b_n es el residuo que se obtiene al dividir $f(x)$ entre $x-a$, y $b_0(x-a)^{n-1} + \dots + b_{n-2}(x-a) + b_{n-1}$ es el cociente. Si se divide este cociente entre $(x-a)$, el residuo será b_{n-1} y el nuevo cociente será $b_0(x-a)^{n-2} + \dots + b_{n-2}$. Este segundo cociente puede usarse para calcular b_{n-2} como el tercer residuo, y así sucesivamente mediante la división sintética se obtienen los coeficientes $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0 = a_0$ como una sucesión de residuos. El lector habrá notado desde el principio que $b_0 = a_0$.

La segunda transformación es la que reemplaza $f(x)$ por

$$g(x) \equiv t^n f\left(\frac{x}{t}\right) \equiv t^n a_0\left(\frac{x}{t} - r_1\right)\left(\frac{x}{t} - r_2\right)\dots\left(\frac{x}{t} - r_n\right) = a_0(x - tr_1)(x - tr_2)\dots(x - tr_n).$$

El término general de $f(x)$ es $a_i x^{n-i}$ y el de $g(x)$ es

$$t^n a_i \left(\frac{x}{t}\right)^{n-i} \equiv a_i t^i x^{n-i}.$$

Se tiene el siguiente:

Teorema 2. *Sea* f(x) *el polinomio de la fórmula* (1), t *un número arbitrario distinto del cero y*

$$g(x) \equiv a_0x^n + ta_1x^{n-1} + t^2a_2x^{n-2} + \dots + t^{n-1}a_{n-1}x + t^na_n.$$

Entonces si $r_1, \dots, r_n$ *son las raíces de* $f(x)$, *las raíces de* $g(x)$ *son* $tr_1, tr_2, \dots, tr_n$.

Si $a_n = 0$, entonces x es un factor de cierta multiplicidad m de $f(x)$, cero es una raíz de multiplicidad m de $f(x)$, y se puede quitar el factor x^m de $f(x)$. Préstese atención a los polinomios para los cuales $a_n \neq 0$, de modo que ninguna raíz r_i de $f(x)$ sea cero y que cada r_i^{-1} exista. Se define

$$g(x) \equiv x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

y obsérvese que

$$g(x) \equiv a_0 x^n \left(\frac{1}{x} - r_1\right)\left(\frac{1}{x} - r_2\right)\ldots\left(\frac{1}{x} - r_n\right)$$

$$\equiv a_0(1 - r_1x)(1 - r_2x)\ldots(1 - r_nx).$$

Entonces, si $s_i = 1/r_i$, se tiene

$$g(x) = a_0 r_1 r_2 \ldots r_n (s_1 - x)(s_2 - x)\ldots(s_n - x).$$

Ya que $r_1 r_2 \ldots r_n = (-1)^n a_n/a_0$, se tiene

$$g(x) = a_n(x - s_1)\ldots(x - s_n)$$

con lo que se ha probado el siguiente:

Teorema 3. *Sea* $f(x) \equiv a_0x^n + \ldots + a_n$, *con* $a_0a_n \neq 0$. *Entonces las raíces de* $g(x) \equiv a_nx^n + \ldots + a_0$ *son los recíprocos de las raíces de* $f(x)$.

Esta última transformación se usa con menos frecuencia que las otras.

La suma $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ de las raíces de la ecuación $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ es $-a_1/a_0$. Disminuyendo las raíces en $-a_1/na_0$ se obtiene una ecuación $g(x) \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ cuyas raíces son $r_i + a_1/na_0$. Entonces la suma de las raíces de $g(x) = 0$ es cero y $b_1 = 0$. Esta ecuación se llama ecuación *reducida*. Así, pues, se podrá encontrar la solución de cualquier ecuación $f(x) = 0$ siempre que se pueda resolver la ecuación reducida correspondiente.

Una ecuación cúbica reducida se puede escribir, después de dividirla por su coeficiente inicial, en la forma

$$h(x) \equiv x^3 + px + q = 0.$$

El número $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ se llama el *discriminante* de $h(x) = 0$, y puede demostrarse que $h(x) = 0$ tiene tres raíces reales excepto cuando $\Delta < 0$. No se demostrará aquí este resultado.

Ejemplos ilustrativos

I. Increméntense en 2 las raíces de

$$x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 14x + 2.$$

Solución

$$\begin{array}{l}
1 + 8 + 2 - 14 + 2 \,\underline{|-2}\\
\underline{-2 - 12 + 20 - 12}\\
6 - 10 + 6 - 10\\
\underline{-2 - 8 + 36}\\
4 - 18 + 42\\
\underline{-2 - 4}\\
2 - 22\\
\underline{-2}\\
1 + 0
\end{array}$$

La ecuación deseada es $x^4 - 22x^2 + 42x - 10 = 0$.

II. Hállese un polinomio cuyas raíces s estén relacionadas con las raíces r de $27x^3 + 54x^2 + 30x + 5$ por la fórmula $s = 3r + 2$.

Solución

Un polinomio cuyas raíces son $3r$ es

$$27x^3 = 3 \cdot 54x^2 + 9 \cdot 30x + 27 \cdot 5 = 27(x^3 + 6x^2 + 10x + 5).$$

Disminuyendo las raíces en -2 y usando el proceso de la división sintética se obtiene

$$\begin{array}{l}
1 + 6 + 10 + 5 \,\underline{|-2}\\
\underline{-2 - 8 - 4}\\
4 + 2 + 1\\
\underline{-2 - 4}\\
2 - 2\\
\underline{-2}\\
1 + 0
\end{array}$$

Resp.: $x^3 - 2x + 1$.

III. Hállese una ecuación cuyas raíces s estén relacionadas con las raíces r de

$$4x^3 - 38x^2 + 120x - 127 = 0$$

con la fórmula $s = 2(r - 3)$.

Solución

$$\begin{array}{rrrr|l}
4 & -38 & +120 & -127 & \underline{3} \\
 & 12 & -78 & +126 & \\ \hline
 & -26 & +42 & -1 & \\
 & 12 & -42 & & \\ \hline
 & -14 & +0 & & \\
 & 12 & & & \\ \hline
4 & -2 & & &
\end{array}$$

Una ecuación cuyas raíces son $r - 3$ es $4x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, y si multiplicamos estas raíces por 2 se obtiene $4x^3 - 4x^2 - 8 = 0$.

Resp.: $x^3 - x^2 - 2 = 0$.

IV. Determínese en qué casos las raíces de $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ son todas reales.

Solución

Aquí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ y $-a_1/3a_0 = 2/3$. Para evitar fracciones, multiplíquese por 3 las raíces para obtener $x^3 - 6x^2 - 54$. Disminuyendo en 2 las raíces se tiene.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -6 & +0 & -54 & \underline{2} \\
 & +2 & -8 & -16 & \\ \hline
 & -4 & -8 & -70 & \\
 & 2 & -4 & & \\ \hline
 & -2 & -12 & & \\
 & +2 & & & \\ \hline
1 & +0 & & &
\end{array}$$

La cúbica reducida es $x^3 - 12x - 70 = 0$ y

$$\Delta = -4(-12)^3 - 27(70)^2 = 27(256 - 4\,900)$$

es negativo. La ecuación tiene solamente una raíz real.

EJERCICIOS ORALES

1. Usar el teorema 2 para obtener una ecuación cuyas raíces sean las negativas de las de

(a) $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ (d) $x^4 - 7x^3 - 8x^2 - 1$
(b) $2x^5 - 5x^3 + 7x^2 + 2x - 8$ (e) $x^5 - 9x^3 + 10x$
(c) $x^3 - 8x^2 - 9$ (f) $x^4 + 6x^3 - 7x^2$
(g) $x^5 + 4x^4 - 8x - 1$
(h) $7x^5 + 8x^4 - 9x^3 - 10x^2 - 2x - 1$

2. Obténganse polinomios cuyas raíces sean t veces las raíces de los polinomios siguientes, para los valores de t indicados:

(a) $3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$; $t = 2, 3$
(b) $2x^4 + 6x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$; $t = -2, 2$
(c) $3x^3 - 6x^2 + 18x - 54$; $t = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$
(d) $x^4 - 8x^2 - 24x - 64$; $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

3. Calcúlese Δ para cada una de las ecuaciones siguientes y dígase en qué casos todas las raíces son reales.

(a) $x^3 - x - 1 = 0$ (d) $x^3 + 2x + 1 = 0$
(b) $x^3 - 2x - 1 = 0$ (e) $x^3 - 4x - 2 = 0$
(c) $x^3 - 2 = 0$ (f) $x^3 - 3x - 1 = 0$

4. Obténganse polinomios cuyas raíces sean recíprocas de las raíces no nulas de los polinomios del ejercicio oral 1.

EJERCICIOS

1. Disminúyanse en a las raíces de los polinomios siguientes para los valores de a indicados.

(a) $3x^3 + 3x^2 + x - 6$; $a = 1$
Resp.: $3x^3 + 3x^2 + x - 6$.
(b) $2x^4 + 3x^3 - 5x + 8$; $a = 3$
(c) $x^3 - 16x + 17$; $a = 4$ *Resp.:* $x^3 + 12x^2 + 32x + 17$.
(d) $x^3 - 3x^2 + 2x - 4$; $a = -5$
(e) $x^4 - 4x^2 - 2x + 1$; $a = 2$
Resp.: $x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 14x - 3$.
(f) $x^5 + 3x^3 - x - 1$; $a = 3$

2. Increméntense en a las raíces en cada uno de los casos del ejercicio 1.

3. Hallar un polinomio cuyas raíces s estén relacionadas con las raíces r de cada uno de los polinomios siguientes por la fórmula correspondiente:

(*a*) $x^3 - 12x^2 + 56x - 40;\ s = \tfrac{1}{2}r - 2$
Resp.: $x^3 + 2x + 7$.

(*b*) $x^3 - 6x^2 + 8x + 16;\ s = \tfrac{1}{2}(r - 2)$

(*c*) $4x^3 - x + 1;\ s = 2r + 1$ *Resp.:* $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

(*d*) $729x^3 + 243x^2 + 9x - 1;\ s = 3r + \tfrac{1}{3}$

(*e*) $9x^3 - 9x^2 + 4x;\ s = 3(r - \tfrac{1}{3})$
Resp.: $x^3 + x + 2$.

(*f*) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 35;\ s = 2r - 3$

(*g*) $x^3 - 16x^2 + 64x + 48;\ s = \tfrac{1}{2}r - 6$
Resp.: $x^3 + 10x^2 + 28x + 30$.

(*h*) $8x^3 - 12x^2 - 18x - 23;\ s = 4r + 2$

(*i*) $x^3 - 9x^2 + 45x - 54;\ s = \tfrac{1}{3}r - 1$
Resp.: $x^3 + 2x + 1$.

(*j*) $x^3 + 21x^2 + 144x + 54;\ s = \tfrac{1}{3}(r + 6)$

4. Compruébense las respuestas $g(x) = 0$ en cada uno de los casos del ejercicio 3 expresando r en términos de s y aplicando las correspondientes transformaciones a $g(x)$ para obtener la original $f(x)$.

5. Aplíquense las transformaciones que cambien a cada una de las ecuaciones siguientes en una ecuación reducida:

(*a*) $x^3 - 6x^2 + 2 = 0$

(*b*) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ *Resp.:* $x^3 - 3x + 2 = 0$.

(*c*) $2x^3 - 12x^2 + 5x - 9 = 0$

(*d*) $x^4 + 8x^3 - 3x - 1 = 0$ *Resp.:* $x^4 - 24x^2 + 61x - 43 = 0$.

(*e*) $3x^4 + 12x^3 + 7x^2 + 2x + 4 = 0$.

6. Determínese si las raíces de las ecuaciones siguientes son todas reales o no:

(*a*) $3x^3 - x^2 + 1 = 0$

(*b*) $x^3 - x^2 - 2 = 0$

(*c*) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

(*d*) $x^3 - 6x^2 + 1 = 0$

(*e*) $x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
Resp.: No todas reales.

(*f*) $x^3 + 6x^2 - 2x + 2 = 0$
Resp.: Todas reales.

(*g*) $2x^3 + 6x^2 - 3x - 4 = 0$
Resp.: Todas reales.

(*h*) $2x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

2. Raíces enteras. El estudio de las raíces de ecuaciones con coeficientes racionales es equivalente al estudio de las raíces de ecuaciones con coeficientes enteros. En efecto, si se multiplica una ecuación con coeficientes racionales por el m.c.m. de los denominadores de estos coeficientes, se obtiene una ecuación equivalente con coeficientes enteros. Primero se estudiará un procedimiento para hallar las raíces enteras de tales ecuaciones.

Si los coeficientes de $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ son números enteros y si r es una raíz entera de $f(x) = 0$, entonces $f(r) = br + a_n = 0$, en donde $b = a_0r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$ es un entero. Entonces $a_n = (-b)r$, es decir, a_n es divisible por r. Ya que el entero a_n tiene solamente un número finito de divisores, se pueden determinar todas las raíces enteras de $f(x) = 0$ calculando $f(d)$ para todos los divisores d de a_n. Se puede, sin embargo, emplear este procedimiento como sigue.

Sea a un entero arbitrario y $g(x) \equiv f(x + a)$. Con el proceso del artículo 1, los coeficientes

$$b_0 = a_0, \quad b_1, \ldots, \quad b_n = g(0) = f(a)$$

se pueden obtener mediante sumas y productos de enteros. Por consiguiente, éstos son enteros. Las raíces s_i de $g(x) = 0$ están relacionadas con las raíces r_i de $f(x) = 0$ por la relación $s_i = r_i - a$, siendo a un entero. Entonces s_i es un entero si y sólo si r_i es un entero. Se sigue que r puede ser raíz entera de $f(x) = 0$ sólo si $s = r - a$ divide a $f(a)$. Así queda probado el siguiente:

Teorema 4. *Las raíces enteras de una ecuación polinomial* $f(x) = 0$ *con coeficientes enteros son los enteros* r *tales que* $r - a$ *divide a* $f(a)$ *para todo entero* a.

No es conveniente, en general, usar más de unos cuantos valores para a al aplicar el teorema 4 con el fin de obtener las raíces enteras de $f(x)$. Un procedimiento sistemático puede empezarse con el cálculo de $f(0) = a_n$, $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, y $f(-1)$ igual a la suma de todos los coeficientes de todas las potencias pares de x menos la suma de los coeficientes de todas las potencias impares de x. Se supone que $f(0) \neq 0$. Si $f(1) = 0$, se divide $f(x)$ entre $x - 1$ para obtener una ecuación $\phi(x) = 0$ de grado $n - 1$ que ya se ha llamado ecuación con grado reducido. Entonces se comienza nuevamente con el estudio de las raíces enteras de esta nueva ecuación. Se procede análogamente en el caso de que $f(-1) = 0$.

Supóngase ahora que $f(0)$, $f(1)$ y $f(-1)$ son todos distintos de cero. Descompóngase en factores estos enteros. Las tres factorizaciones indicarán cuál de estos enteros tiene menos divisores y se hace entonces una lista de los divisores de dicho entero.

Supóngase primero que se tiene la lista de los divisores d de $f(0)$, omitiendo los valores $d = 1$, $d = -1$ que ya se han probado antes. Entonces una d particular no será una raíz de $f(x) = 0$ a menos que $d - 1$ divida a $f(1)$ y $d + 1$ divida a $f(-1)$. Estas condiciones de divisibilidad eliminarán ya muchos divisores d que no son raíces y después se completa la solución calculando $f(d)$ para los valores restantes.

La segunda posibilidad es de que la lista que se haya hecho sea la de los divisores e de $f(1)$. Entonces una e particular corresponderá a una raíz entera de d de $f(x) = 0$ solamente si $e = d - 1$, $d = e + 1$. Se omite $d = 0$, -1, es decir, $e = -1$, -2 de la lista de divisores en este caso, y se ve que $e + 1$ es una raíz entera de $f(x) = 0$ únicamente si $e + 1$ divide a $f(0)$ y $e + 2 = d + 1$ divide a $f(-1)$.

La última posibilidad es de que se tenga la lista de los divisores c de $f(-1)$. Ya que $c = d + 1$ y $d \neq 0$, 1 se omiten los valores $c = 1, 2$ de esta lista. Entonces $d = c - 1$ será una raíz de $f(x) = 0$ únicamente si $c - 1$ divide a $f(0)$ y $c - 2 = d - 1$ divide a $f(1)$.

En los próximos ejemplos se ilustrará el procedimiento que se acaba de describir. Sin embargo, los ejercicios se pospondrán hasta después del próximo artículo, en el cual los resultados adquieren un significado adicional.

Ejemplos ilustrativos

I. Determínense las raíces enteras de $f(x) \equiv x^4 - 49x^2 + 8x + 56 = 0$.

Solución

Se ve que $f(0) = 56$, $f(1) = 16$, $f(-1) = 0$. Mediante la división sintética se tiene

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 + 0 & - 49 + & 8 + & 56 & & \underline{-1} \\ & -1 + & 1 + & 48 & - 56 & \\ \hline 1 - 1 & - 48 + & 56 + & 0 & & \end{array}$$

Por consiguiente, $f(x) \equiv (x+1)\phi(x)$ en donde

$$\phi(x) \equiv x^3 - x^2 - 48x + 56$$

Por consiguiente, $\phi(0) = 56 = 8 \cdot 7$, $\phi(1) = 8$, $\phi(-1) = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Los divisores e de $\phi(1)$ que se han alistado son 1, 2, 4, -4, 8, -8. Los valores correspondientes para $d = e + 1$ son 2, 3, 5, -3, 9, -7 y se conservan solamente 2, -7. Entonces $d + 1 = 3$, -6 son los que se conservan. Con las divisiones sintéticas

$$\begin{array}{l|l} 1 - 1 - 48 + 56 & \underline{2} \\ \quad\; 2 + \;\;2 - 92 & \\ \hline 1 + 1 - 46 - 36 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 - 1 - 48 + 56 & \underline{-7} \\ \quad -7 + 56 - 56 & \\ \hline 1 - 8 + \;\;8 + \;\;0 & \end{array}$$

se ve que las raíces enteras de $f(x)$ son -1, -7. Nótese que ahora se pueden calcular las raíces restantes de $f(x)$. Estas son $4 + 2\sqrt{2}$, $4 - 2\sqrt{2}$.

II. Determínense las raíces enteras de

$$f(x) \equiv x^4 - 3x^2 - 63x - 72 = 0.$$

Solución

Se calcula $f(0) = -72$, $f(1) = -137$, $f(-1) = -11$. Los divisores de $f(-1)$ que se consideran son $c = -1$, 11, -11 y $d = c - 1 = -2$, 10, -12. Se desprecia 10 y se ve que $d - 1 = -3$, -13 no dividen a $f(1)$. Por lo tanto, $f(x)$ no tiene raíces enteras.

3. Raíces racionales. Una raíz racional $r \neq 0$ de una ecuación (1) con coeficientes enteros puede expresarse como una fracción

$$r = \frac{p}{q}$$

en donde p y q son enteros no nulos, cuyo m.c.d. es uno; puede suponerse siempre que q es positivo. Según el teorema 2, el entero p es una raíz de la ecuación

$$a_0x^n + qa_1x^{n-1} + \ldots + q^na_n = 0$$

y, según el artículo 2, p divide a q^na_n. Ya que p y q son primos entre sí, también lo son p y q^n. Por el lema 7 del artículo 8 del capítulo II se deduce entonces que p divide a a_n.

El número q/p es una raíz de $a_nx^n + \ldots + a_0 = 0$ y q es una raíz de $a_nx^n + pa_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p^na_0$. Entonces el entero positivo q divide a p^na_0 y por el lema arriba mencionado se ve que q divide a a_0. Se ha probado, pues, el siguiente:

Teorema 5. *Sea* p/q *una raíz racional distinta de cero de* f(x) *con coeficientes enteros con* p *y* q *enteros primos entre sí y* q > 0. *Entonces el entero* p *divide a* a_n *y el entero positivo* q *divide a* a_0.

En el caso en que $a_0 = 1$, el entero positivo q divide a 1 y $q = 1$. Esto conduce al siguiente:

Teorema 6. *Toda raíz racional de una ecuación con coeficientes enteros y con coeficiente inicial* 1 *es un entero.*

El teorema 5 puede usarse para hallar las raíces racionales de $f(x) = 0$. Se anotan los divisores p de a_n, los divisores q de a_0 y los cocientes correspondientes p/q y después se usa la división sintética para calcular $f(p/q)$. Sin embargo es más simple seleccionar un número t de tal forma que la ecuación

$$(2) \qquad y^n + \frac{a_1}{a_0}ty^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}t^2y^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}t^n$$

tenga coeficientes enteros. Las raíces racionales de esta nueva ecuación son enteros u y pueden calcularse con el método del artículo 2. Las raíces racionales de $f(x)$ son los números u/t. Obsérvese que basta tomar como t a $t = a_0$. Sin embargo, es preferible usar el mínimo entero positivo t tal que en la fórmula (2) los coeficientes sean enteros.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar las raíces racionales de $f(x) \equiv 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = 0$.

Solución

Los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3, 6, y los de 3 son 1, 3, así que las raíces racionales posibles son 1, —1, 2, —2, 3, —3, 6, —6, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$. Aplicando el teorema 2 para $t = 3$, se obtiene la ecuación
$g(y) \equiv \frac{1}{3}(3y^3 + 12y^2 + 45y - 6 \cdot 27) \equiv y^3 + 4y^2 + 15y - 54 = 0$.
Los valores posibles arriba anotados se multiplican por 3 y se obtienen 3, —3, 6, —6, 9, —9, 18, —18, 1, —1, 2, —2, como posibles raíces racionales de $g(y)$. Obsérvese que todos los números dividen a 54, pero algunos de los divisores de $a_n = 54$ no figuran en la lista. Se calcula $g(1) = -34$, $g(-1) = -66$, se omite $d = \pm 1$, y se ve que $d - 1$ divide a 34 solamente para $d = 3, 18, 2$. Entonces $d + 1$ divide a 66 solamente para $d = 2$. Con la división sintética, $g(y) = (y^2 + 6y + 27)(y - 2)$ y la única raíz racional de $f(x)$ es 2/3. Las otras raíces son $-1 + \sqrt{-2}$, $-1 - \sqrt{-2}$, ya que el polinomio cuyas raíces son $\frac{1}{3}$ de las de $y^2 + 6y + 27$ es $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$.

II. Hallar las raíces racionales de $f(x) = 48x^3 + 16x^2 - 3x - 1 = 0$.

Solución

Ya que $a_n = 1$, las raíces racionales de esta ecuación son las recíprocas de las raíces enteras de $g(y) \equiv y^3 + 3y^2 - 16y - 48 = 0$. Ahora, $g(1) = -60$, $g(-1) = -30$. Los divisores h de $-30 = -3 \cdot 5 \cdot 2$ son 1, —1, 2, —2, 3, —3, 6, —6, 5, —5, 10, —10, 15, —15, 30, —30. Entonces $d = h - 1$ divide a $g(0)$ solamente si $d = -2, -3, 2, -4, 4, -6, -16$ y $d - 1$ divide a -60 solamente si $d = -2, -3, 2, -4, 4$. Se calcula ahora $g(2) = 8 + 12 - 32 - 48 \neq 0$, $g(-2) = -8 + 12 + 32 - 48 \neq 0$,

$$\begin{array}{r|l} 1 + 3 - 16 - 48 & -3 \\ -3 + \ 0 + 48 & \\ \hline 0 - 16 + \ 0 & \end{array}$$

y se ve que $g(y) = (y^2 - 16)(y + 3)$. Las raíces de $f(x) = 0$ son $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$.

III. Determínense las raíces racionales de $x^3 - 48x + 64 = 0$.

Solución

Se usa el teorema 2 con $t = \frac{1}{4}$ para obtener $g(y) = y^3 - 3y + 1 = 0$. Evidentemente $g(1) \neq 0$, $g(-1) \neq 0$ y la ecuación no tiene raíces racionales.

EJERCICIOS

1. Determínense las raíces enteras de los polinomios siguientes:

(a)	$x^3 - 15x^2 + 54x - 54$	*Resp.:* 3.
(b)	$2x^3 - 8x^2 + 9x - 36$	
(c)	$x^3 + 19x^2 + 82x + 60$	*Resp.:* -5.
(d)	$x^3 - 17x^2 + 78x - 56$	
(e)	$x^3 - 4x^2 - 95x + 198$	*Resp.:* 2, 11, -9.
(f)	$x^3 + x^2 - 64x - 72$	
(g)	$2x^3 + 39x^2 - 188x - 176$	*Resp.:* Nada.
(h)	$x^3 - 14x^2 + 9x + 324$	
(i)	$x^3 + 15x^2 + 84x + 196$	*Resp.:* -7.
(j)	$3x^3 + 20x^2 - 131x - 132$	
(k)	$x^4 + x^3 - 30x^2 - 10x + 200$	*Resp.:* 4, -5.
(l)	$2x^4 - 47x^2 - 42x - 135$	
(m)	$x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x - 24$	*Resp.:* 4.
(n)	$x^3 + 2x^2 - 15x - 52$	
(o)	$x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 34x - 60$	*Resp.:* 2, -15.
(p)	$x^3 - 9x^2 - 24x + 216$	
(q)	$x^4 + 4x^3 - 75x^2 - 324x - 486$	*Resp.:* 9, -9.
(r)	$x^5 - 24x^4 + 149x^3 - 352x^2 + 294x - 608$	

2. ¿Qué se puede decir de las raíces racionales de los polinomios del anterior ejercicio en todos los casos, excepto *(g)*, *(j)* y *(l)*?

3. Hallar todas las raíces racionales de las ecuaciones siguientes:

(a)	$2x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$	*Resp.:* 2.
(b)	$6x^3 - 9x^2 + 2x - 3 = 0$	
(c)	$20x^3 + 11x^2 - 8x + 1 = 0$	*Resp.:* -1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.
(d)	$x^3 + 3x^2 - 2x + 15 = 0$	
(e)	$3x^3 - 37x^2 + 93x - 27 = 0$	*Resp.:* $\frac{1}{3}$, 3, 9.
(f)	$208x^3 + 351x^2 + 39x - 1 = 0$	
(g)	$2x^3 - x + 5 = 0$	*Resp.:* Nada.
(h)	$15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$	
(i)	$54x^3 - 27x^2 + 2x - 3 = 0$	*Resp.:* Nada.
(j)	$2x^4 + 16x^3 + 47x^2 + 60x + 27 = 0$	

(*k*) $9x^3 + 9x^2 - x - 6 = 0$ *Resp.:* $\frac{2}{3}$.
(*l*) $6x^3 + 21x^2 + 26x - 13 = 0$
(*m*) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 - x - 6 = 0$ *Resp.:* -1.
(*n*) $2x^3 - 15x^2 + 42x + 44 = 0$

4. Cotas superiores e inferiores. Sean a y b dos números reales con a menor què b. Se designa con $a \leqq x \leqq b$ al conjunto de todos los números reales x entre a y b. Si se omite a de este conjunto, se escribe entonces $a < x \leqq b$, y si se omite b, se escribe $a \leqq x < b$. Si se omiten a y b, se escribe $a < x < b$. Todos estos conjuntos de números reales se llaman *intervalos reales.*

Una *cota superior* para las raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$ con coeficientes reales es un número real U tal que $f(b) \neq 0$ para toda $b \geqq U$. Una *cota inferior* es un número real L tal que $f(a) \neq 0$ para toda $a \leqq L$. Entonces las raíces reales de $f(x) = 0$ están todas en el intervalo $L < x < U$.

Se dirigirá la atención a los polinomios $f(x)$

$$a_0x^n + \ldots + a_n$$

en los cuales a_0 es positivo. Entonces, si ningún coeficiente de $f(x)$ es negativo, no hay ninguna raíz positiva del polinomio $f(x)$. En efecto, si $b > 0$, el número $f(b)$ es, en este caso, una suma de números positivos y, por consiguiente, positivo. Por lo tanto, cualquier número real positivo es una cota superior. Si $a_n \neq 0$, una cota superior es $U = 0$.

Supóngase ahora que $f(x)$ tiene algunos coeficientes negativos. Sea k el menor entero tal que a_k sea negativò. Entonces k es la diferencia entre el grado n de $f(x)$ y el exponente de la máxima potencia de x que tenga coeficiente negativo. Por ejemplo, en $3x^5 - 2x^4 + 7x^2 - 1$ se tiene que $k = 5 - 4 = 1$, y en

$$6x^7 + 2x^6 - x^4 - 162x^3 + 2x^2 - 4x - 2$$

se tiene que $k = 7 - 4 = 3$. Sea G el máximo valor absoluto de los coeficientes negativos de $f(x)$. En el segundo ejemplo, $G = 162$. Entonces

$$U = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}} \tag{3}$$

es una cota superior. En el segundo ejemplo, $G/a_0 = 27$ y

$$U = 1 + \sqrt[3]{27} = 4.$$

Nótese que en el primer ejemplo $k = 1$, y

$$U = 1 + \sqrt[k]{2/3} = 1 + 2/3.$$

En realidad se demostrará más adelante no solamente que U es una cota superior, sino también que $f(b) > 0$ para toda $b \geqq U$.

Es conveniente conocer también un segundo procedimiento para obtener cotas superiores. Se divide el valor absoluto de cada coeficiente negativo de $f(x)$ entre la suma de todos los coeficientes positivos que lo preceden. En el segundo ejemplo mencionado, se obtienen las fracciones

$$\frac{1}{6+2}, \quad \frac{162}{6+2}, \quad \frac{4}{6+2+2}, \quad \frac{2}{6+2+2}.$$

Agréguese 1 a la *mayor* fracción así obtenida. El número U así obtenido será una cota superior. En el ejemplo, este valor es

$$1 + 20\tfrac{1}{4} = 21\tfrac{1}{4}.$$

Obsérvese que las fracciones $\dfrac{1}{6+2}$ y $\dfrac{161}{6+2}$ tienen el mismo denominador y, por consiguiente, la de menor numerador no necesita ser anotada. Análogamente no se necesita anotar $\dfrac{2}{6+2+2}$ sino únicamente $\dfrac{4}{6+2+2}$.

Para obtener cotas inferiores se estudia el polinomio $g(x) \equiv (-1)^n f(-x)$. Este polinomio tiene el mismo coeficiente inicial $a_0 > 0$ que $f(x)$ y sus raíces son las negativas de las raíces de $f(x)$. Entonces, si toda raíz de $g(x)$ es menor que un número real U_0, toda raíz de $f(x)$ será mayor que $L = -U_0$. Por consiguiente, el negativo de cualquier cota superior para las raíces reales de $(-1)^n f(-x)$ es una cota inferior para las raíces reales de $f(x)$.

Se dice que los coeficientes de $f(x)$ tienen *signos alternantes* cuando los coeficientes de $(-1)^n f(-x)$ tienen todos el mismo signo. Esto ocurre, desde luego, cuando todas las potencias pares de x tienen coeficientes con el mismo signo y éste es el contrario del signo de los coeficientes de todas las potencias impares de x. Por ejemplo, según la definición, los signos de

$$6x^7 + 3x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

son alternantes, mientras que los signos de $7x^5 - 6x^3 + 2x - 1$ no lo son. Cuando los signos de los coeficientes de $f(x)$ son alternantes, $f(x) = 0$ no tiene raíces negativas. Si $a_n \neq 0$, cero es una cota inferior.

Se han dado dos métodos para obtener cotas superiores e inferiores. Se llamará *método de los radicales* al primero de ellos y *método de las fracciones* al segundo. A la menor de las cotas superiores obtenidas se le llamará la *mejor cota superior* y, de manera análoga, a la mayor de las dos cotas inferiores, la *mejor cota inferior*. Es posible que en un mismo ejercicio uno de los métodos dé la mejor cota superior y el otro la mejor cota inferior.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar las mejores cotas para las raíces reales de $f(x) \equiv x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$.

Solución

Aquí $G = 80$, $k = 1$ y el método de los radicales da

$$U_1 = 1 + 80 = 81.$$

Se calculan las fracciones $14/1$, $80/52$, y el método de las fracciones da

$$U_2 = 1 + 14 = 15.$$

Por consiguiente, la mejor cota superior es $U = 15$. También

$$f(-x) = x^4 + 14x^3 + 51x^2 + 14x - 80$$

y, por lo tanto, $G = 80$, $k = 4 - 0 = 4$, $-L_1 = 1 + \sqrt[4]{80}$ es aproximadamente 4. El método de las fracciones da $-L_2 = 1 + 80/80 = 2$. Por consiguiente, la mejor cota inferior es $L = -2$. Se indica el resultado diciendo que las raíces reales r de $f(x) = 0$ están en el intervalo $-2 < r < 15$.

II. Hallar las mejores cotas para las raíces reales de $x^4 + 2x^3 + 11x^2 + x - 81 = 0$.

Solución

Aquí $G = 81$, $k = 4$ y $U_1 = 1 + \sqrt[4]{81}$. También

$$U_2 = 1 + 81/15 > 6,$$

y, por tanto, $U = 4$. Se tiene

$$f(-x) \equiv x^4 - 2x^3 + 11x^2 - x - 81$$

y $k = 1$, $G = 81$ de modo que $-L_1 = 1 + 81 = 82$. Se examinan las fracciones 2, $81/12 = 27/4$ y $-L_2 = 1 + 27/4 = 31/4$. Por consiguiente, $-31/4 < r < 4$.

EJERCICIOS ORALES

1. Qué puede decirse inmediatamente de las raíces reales de

(a) $x^4 + 3x^3 + 2x + 1 = 0$
(b) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 = 0$
(c) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$
(d) $x^6 + 2x^4 - 3x^3 - 6x = 0$
(e) $-x^3 - 6x^2 - 5x - 4 = 0$
(f) $-x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0$
(g) $-x^2 + 2x - 1 = 0$
(h) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

2. ¿Cuánto valen los números k y G de los dos métodos en las ecuaciones siguientes?

(a) $2x^3 - 41x^2 + 320x - 800 = 0$
(b) $4x^5 - 8x^4 + 20x^3 + 100x^2 - 73x + 5 = 0$
(c) $x^4 - 36x^3 + 49x + 50 = 0$

(*d*) $2x^5 - 6x^2 - 7x + 14 = 0$
(*e*) $4x^8 + 6x^7 - 18x^4 - 6x^3 + 3x - 20 = 0$
(*f*) $x^7 + 4x^6 + 4x^4 - 9x - 64 = 0$
(*g*) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 22x - 27 = 0$
(*h*) $3x^4 - 12x^3 + 15x - 8 = 0$
(*i*) $x^8 - 16x^6 + 24x^4 - 25x^2 + 3x + 2 = 0$

3. ¿Qué fracciones se calculan en (*e*) del ejercicio oral 2?
4. ¿Cuáles son las cotas superiores en (*e*)?

EJERCICIOS

1. Calcular las mejores cotas superiores e inferiores para las raíces reales de los polinomios del ejercicio oral 2.
2. Calcular las mejores cotas para los polinomios de los ejercicios del artículo 3.

5. Demostración del método de los radicales (CURSO COMPLETO). Las raíces de $f(x)$ coinciden con las de

$$F(x) \equiv \frac{1}{a_0} f(x) \equiv x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n.$$

Sean k y G las mismas del artículo 4 y c_k el primer coeficiente negativo de $F(x)$. Defínase

$$d = \frac{G}{a_0}.$$

Entonces $-d$ es un coeficiente negativo de $F(x)$ tal que $d \geqq |c_i|$ para todo coeficiente negativo c_i de $F(x)$.

Hágase $U = 1 + \sqrt[k]{d}$ y supóngase que $b \geqq U$. Entonces $b - 1 \geqq \sqrt[k]{d}$ y $(b-1)^k \geqq c$. Pero $U > 1$ y también $b > 1$, $b^{k-1} \geqq (b-1)^{k-1}$. Entonces $b^{k-1}(b-1) \geqq (b-1)^k \geqq d$ y el número

$$e = b^k - b^{k-1} - d \geqq 0.$$

Los términos de $F(b)$ con coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ no son negativos y, por consiguiente, $F(b) \geqq b^n + c_k b^{n-k} + \ldots + c_n$. Pero todo coeficiente $c_i \geqq -d$ y entonces

$$F(b) \geqq s, \qquad s = b^n - d(b^{n-k} + b^{n-k-1} + \ldots + 1).$$

Sin embargo,

$$s(b-1) = b^n(b-1) - d(b^{n-k+1}-1) = b^{n+1} - b^n$$
$$- db^{n-k+1} + d = b^{n-k+1}(b^k - b^{k-1} - d) + d$$
$$= eb^{n-k+1} + d > 0.$$

Así, pues, $s(b-1) > 0$, $s > 0$, $F(b) > 0$. Ya que $a_0 > 0$, el número $f(b) > 0$, para todo $b \geqq U$, y U es una cota superior para las raíces reales de $f(x) = 0$.

Esta demostración se ha dado más que nada como un ejemplo de un tipo de argumento usado en el estudio de polinomios con coeficientes reales. No se dará aquí demostración alguna del método de las fracciones, pero se puede encontrar una en *First Course in the Theory of Equations,* de L. E. Dickson.

6. Aislamiento de las raíces reales de una ecuación real. Como se observó en el capítulo VI, todo polinomio $f(x)$ de grado n con coeficientes reales se expresa como un producto

$$(4) \qquad f(x) \equiv a_0(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_t)\phi(x),$$

en donde $r_1, \ldots, r_t$ son las raíces reales de $f(x) = 0$ y $\phi(x)$ es un producto de factores del tipo

$$x^2 - 2dx + d^2 + e^2,$$

con d y e números reales y $e \neq 0$. Las raíces de $\phi(x)$ son las raíces imaginarias de $f(x) = 0$, el grado $n-t$ de $\phi(x)$ es par y $(-1)^{n-t} = 1$, $(-1)^n = (-1)^t$.

Si c es un número real arbitrario, entonces

$$c^2 - 2cd + d^2 + e^2 = (c-d)^2 + e^2 > 0.$$

Por esto, si c es real, el valor $\phi(c)$ es un número real positivo. Si $c > r_i$ para $i = 1, \ldots, t$, los factores $c - r_i$ son todos positivos y $f(c)$ tiene el mismo signo que a_0. Si $c < r_i$ para $i = 1, \ldots, t$, los números $c - r_i$ son todos negativos y $f(c)$ tiene el *mismo signo que* $(-1)^t a_0 = (-1)^n a_0$. Se puede enunciar este resultado como sigue:

Teorema 7. *Sean* U *una cota superior y* L *una cota inferior arbitrarias para las raíces reales de* $f(x) \equiv a_0x^n + \ldots + a_n$. *Entonces* $f(c)$ *tiene el mismo signo que* a_0 *para todo* $c \geqq U$ *y* $f(c)$ *tiene el mismo signo que* $(-1)^n a_0$ *para todo* $c \leqq L$.

Se probará también el siguiente:

Teorema 8. *Sean* $a < b$ *con* a *y* b *reales y* $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. *Entonces el número de raíces reales entre* a *y* b *es par o impar según sean los signos de* $f(a)$ *y* $f(b)$ *iguales u opuestos.*

En efecto, el signo de $f(b)/f(a)$ es el mismo que el signo de

$$Q = \frac{b - r_1}{a - r_1}\,\frac{b - r_2}{a - r_2}\cdots\frac{b - r_t}{a - r_t}.$$

Si $r_i > b > a$, entonces $b - r_i$ y $a - r_i$ son ambos negativos y, por lo tanto, su cociente es positivo. Si $b > a > r_j$, entonces $b - r_j$ y $a - r_j$ son ambos positivos y su cociente es positivo. Pero si $b > r_k > a$, el cociente $(b - r_k)/(a - r_k)$ es negativo. Así, el signo de Q es $(-1)^s$ en donde s es el número de raíces reales r_k entre a y b. Se sigue que s es par o impar según sean iguales u opuestos los signos de $f(b)$ y $f(a)$.

La *longitud del intervalo* entre a y b es $|b - a|$. Toda raíz real r de $f(x)$ está en algún intervalo $a < r < b$ tal que $b - a \leqq 1$, y tal que ninguna raíz de $f(x)$ distinta de r está en el mismo intervalo. Se dirá que se ha *aislado* la raíz r cuando se haya encontrado uno de tales intervalos.

Si m es un entero arbitrario del que $f(m)$ y $f(m + 1)$ tienen signos contrarios, entonces en el intervalo $m < x < m + 1$ hay por lo menos una raíz real de $f(x)$. Así, pues, un procedimiento para aislar todas las raíces reales de $f(x)$ es el de calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, etc. Este es efectivo si en ningún intervalo $m < x < m + 1$, con m entero, hay más de una raíz real de $f(x)$. Se termina automáticamente cuando se descubre previamente el número de raíces reales de $f(x)$ o si se encuentran n raíces reales de $f(x)$ de grado n. En todos los casos puede terminarse con un cálculo inicial de U y L.

Este no es completamente efectivo si algún intervalo $m < x < m + 1$ contiene dos o más raíces y, por lo tanto, se necesita un método para determinar el número y para localizar las raíces reales. En el artículo 8 se dará tal criterio.

Ejemplo ilustrativo

Aislar las raíces reales de

$$f(x) \equiv x^4 - 23x^2 + 30x + 34.$$

Solución

Se calcula $f(0) = 34$, $f(1) = 42$, $f(2) = 18$, $f(3) = -22$, $f(4) = 42$, $f(-1) = -18, \ldots, f(-5) = -66$, $f(-6) = 322$. Por lo tanto, $f(x)$ tiene cuatro raíces reales, aisladas como sigue:

$$-6 < r_1 < -5, \qquad -1 < r_2 < 0, \qquad 2 < r_3 < 3, \qquad 3 < r_4 < 4.$$

II. Aislar las raíces reales de $f(x) \equiv 3x^3 - 3x - 1 = 0$.

Observación: Ya que $f(x) \equiv 3x(x^2 - 1) - 1$, se ve que $f(0) = f(-1) = -1$ y $f(n) < 0$ para todo entero negativo n. Sin embargo, $f(x) = 0$ tiene dos raíces negativas.

Solución

Multiplíquense las raíces por 3 para obtener

$$3x^3 - 27x - 27 = 3g(x)$$

con $g(x) = x^3 - 9x - 9$. Entonces $g(0) = -9$, $g(1) = -17$, $g(2) = -19$, $g(3) = -9$, $g(4) = 19$, $g(-1) = -1$, $g(-2) = 1$, $g(-3) = -9$. Por lo tanto, $3 < s_1 < 4$, $-2 < s_2 < -1$, $-3 < s_3 < -2$ en donde $s_i = 3r_i$. Así, pues, las raíces de $f(x)$ están aisladas por las relaciones

$$1 < r_1 < 4/3, \qquad -2/3 < r_2 < -1/3, \qquad -1 < r_3 < -2/3.$$

EJERCICIOS

1. Aislar la única raíz real de las ecuaciones siguientes:

(*a*) $x^3 + 3x - 1 = 0$	(*e*) $x^3 - 3x + 2 = 0$
(*b*) $x^3 + 3x + 2 = 0$	(*f*) $x^3 + 2x^2 + 4 = 0$
(*c*) $2x^3 + x - 1 = 0$	(*g*) $x^3 + x^2 + 4 = 0$
(*d*) $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$	(*h*) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

2. Aislar las tres raíces reales de las ecuaciones siguientes:

(*a*) $x^3 - 4x - 1 = 0$	(*f*) $x^3 - 7x + 7 = 0$
(*b*) $x^3 - 5x + 2 = 0$	(*g*) $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$
(*c*) $2x^3 - 3x - 1 = 0$	(*h*) $x^3 - 3x^2 - 13x + 7 = 0$
(*d*) $2x^3 - 4x + 1 = 0$	(*i*) $x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0$
(*e*) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$	(*j*) $x^3 - 5x - 1 = 0$

3. Aislar las dos raíces reales de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $x^4 - 4x + 2 = 0$
(*b*) $x^4 - 3x + 1 = 0$
(*c*) $x^4 - 7x^2 - 6x - 2 = 0$
(*d*) $x^4 - 8x^2 - 20x - 21 = 0$
(*e*) $x^4 - 7x^2 - 26x - 40 = 0$
(*f*) $x^4 - 14x^2 + 45x - 50 = 0$
(*g*) $x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 1 = 0$
(*h*) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$
(*i*) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x - 6 = 0$
(*j*) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 10x - 12 = 0$
(*k*) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$
(*l*) $x^4 - 32x + 40 = 0$

4. Aislar las cuatro raíces reales de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $x^4 - 15x^2 - 12x - 2 = 0$
(*b*) $x^4 - 22x^2 + 8x + 8 = 0$
(*c*) $x^4 - 40x^2 - 64x + 80 = 0$
(*d*) $x^4 - 11x^2 - 6x + 10 = 0$
(*e*) $4x^4 - 24x^2 + 8x + 3 = 0$
(*f*) $4x^4 - 28x^2 + 12x + 3 = 0$
(*g*) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 8x - 2 = 0$
(*h*) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 12x + 3 = 0$
(*i*) $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x + 2 = 0$
(*j*) $4x^4 - 32x^2 + 24x - 3 = 0$

7. La regla de Descartes de los signos (CURSO COMPLETO).

La estimación del número P de raíces positivas de una ecuación $f(x) = 0$ puede efectuarse contando el número V de variaciones de signo en la sucesión de los coeficientes no nulos de $f(x)$. Los términos con un mismo signo pueden siempre agruparse y escribir el resultado en la forma

$$f(x) \equiv f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_V(x). \tag{5}$$

Por ejemplo, si

$$f(x) \equiv (3x^{12} + 4x^{10}) - (2x^9 + 4x^8 + x^6) + (3x^5) \\ - (2x^4 + 6x^2) + (11x),$$

los polinomios son $f_0 \equiv 3x^{12} + 4x^{10}$, $f_1 \equiv -2x^9 - 4x^8 - x^6$. $f_2 \equiv 3x^5$, $f_3 \equiv -2x^4 - 6x^2$, $f_4 \equiv 11x$, y $V = 4$.

Los factores x de $f(x)$ y las raíces nulas correspondientes pueden quitarse de $f(x)$ sin alterar el valor de V, y se puede suponer que $f(x) \equiv a_0x^n + \ldots + a_n$ con a_0 y a_n *ambos distintos de cero.* Entonces V es el número de veces que cambia el signo, empezando en a_0 y pasando por la sucesión de coeficientes hasta el a_n. Por consiguiente, V es *par si* a_0 *y* a_n *tienen el mismo signo, e impar en el caso contrario.* El número P es el número de raíces entre 0 y una cota superior U, $f(0) = a_n$ y $f(U)$ tiene el mismo signo que a_0. Según el teorema 8, P es par precisamente cuando V es par. Se sigue que $V - P$ es un *entero par.*

Sea $b_ix^{n_i}$ el término de máximo grado en el polinomio $f_i \equiv f_i(x)$ de la fórmula (5), y $c_ix^{m_i}$ el de menor grado. Entonces

$$b_0 = a_0, \qquad n_0 = n, \qquad c_V = a_n, \qquad m_V = 0.$$

Obsérvese que en el ejemplo especial de arriba, $f_2 \equiv 3x^5$ y así $b_2 = c_2$, $m_2 = n_2$.

Sea r un número positivo arbitrario y fórmese el producto

$$(x-r)f(x) \equiv (x-r)f_0 + (x-r)f_2 + \ldots + (x-r)f_V.$$

El término de máximo grado en $(x-r)f_i$ es $b_ix^{n_i+1}$ y el término de menor grado es $-rc_ix^{m_i}$. Estos términos tienen signos contrarios. El coeficiente inicial de $(x-r)f(x)$ es el coeficiente inicial a_0 de $f(x)$, y se empiezan a contar las variaciones de signo de $(x-r)f(x)$ con el mismo número real a_0. El término de grado mínimo en cada $(x-r)f_i$, para $i = 0, 1, \ldots, V-1$, tiene el mismo signo que el término de grado máximo de $(x-r)f_{i+1}$ y el signo opuesto al del término de grado máximo de $(x-r)f_1$. Se sigue que el número de variaciones en la sucesión de coeficientes empezando por a_0 y terminando con el término de máximo grado de $(x-r)f_V$ es por lo menos V. El término constante $-a_n r$ tiene el signo opuesto al del coeficiente inicial de $(x-r)f_V$ y, por consiguiente, el número de variaciones de signo para la sucesión de coeficientes de $(x-r)f(x)$ es por lo menos $V+1$.

Supóngase ahora que $f(x)$ es un polinomio con P raíces positivas $r_1, r_2, \ldots, r_P$. Entonces

$$f(x) \equiv (x-r_P)\ldots(x-r_2)(x-r_1)g(x).$$

El resultado acabado de probar implica que si V_0 es el número de variaciones para $g(x)$, entonces $(x-r_1)g(x)$ tiene al menos V_0+1 variaciones, $(x-r_2)[(x-r_1)g(x)]$ al menos V_0+2 variaciones, $\ldots$, $f(x)$ al menos V_0+P variaciones. Entonces $V \geqq P$. Se ha deducido la siguiente:

Regla de Descartes de los signos. *Sea* V *el número de variaciones de signo en la sucesión de coeficientes no nulos de* f(x) *y* P *el número de raíces positivas de* f(x). *Entonces*

$$\mathrm{V}-\mathrm{P}$$

es un número par no negativo.

Esta regla establece que no puede haber más raíces positivas que variaciones de signo. Se obtiene un resultado preciso solamente cuando $V=1$, y, por consiguiente, $P=1$, o bien cuando $V=0$ y entonces $P=0$. Puede aplicarse a $f(-x)$ para estimar el número de raíces negativas de $f(x)$.

EJERCICIOS ORALES

Usar la regla de Descartes para calcular el número de raíces positivas y negativas de los polinomios siguientes:

(a) $3x^5-2x^4-4x^2-1$ *(c)* $2x^7+3x^4+5x^3+6$
(b) $2x^7+4x^5-3x^3-2x$ *(d)* $6x^7-5x^4-1$

(e) $5x^6 + 6x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
(f) $x^7 + 3x^5 - 4x^3 - 2x + 1$
(g) $x^{10} + 9x^8 + 6x^4 - 3x^3 - 2x - 1$
(h) $x^{10} - 9x^9 + 8x^7 - 7x^6 + 8x^4 + 1$
(i) $x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$
(j) $x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$

8. El teorema de Sturm (CURSO COMPLETO). Se designará con f_0 a un polinomio dado $f(x)$ y con f_1 a su derivada $f'(x)$. Aplicando el algoritmo de la división se tiene

$$f_0 \equiv q_1 f_1 - f_2.$$

Obsérvese que el residuo se ha designado con $-f_2$. El signo menos es importante.

Divídase f_1 entre f_2 obteniendo $f_1 \equiv q_2 f_2 - f_3$. Nuevamente se ha definido $f_3 \equiv f_3(x)$ como el negativo del polinomio residuo. Se continúan estas divisiones, teniendo, en general,

$$f_{i-2} \equiv q_{i-1} f_{i-1} - f_i,$$

y el proceso termina cuando se llega a

$$f_{t-2} \equiv q_{t-1} f_{t-1} - f_t, \qquad f_{t-1} \equiv q_t f_t.$$

Realmente sólo se trata de una ligera modificación del algoritmo para el m.c.d. del capítulo IV, y $f_t \equiv f_t(x)$ es un múltiplo constante del m.c.d. de $f(x)$ y $f'(x)$. Los polinomios de la sucesión,

$$f_0 \equiv f(x), \quad f_1 \equiv f'(x), \quad f_2 \equiv f_2(x), \quad \ldots, \quad f_t \equiv f_t(x),$$

se llaman *funciones de Sturm*. El procedimiento de multiplicar una función $f_i(x)$, en un paso, por un número positivo (para evitar fracciones) conducirá a una colección de funciones que difieren de las originales solamente por factores constantes positivos. Estas funciones de Sturm modificadas se podrán también usar.

Si a es un número real arbitrario, se puede calcular la sucesión $f_0(a), f_1(a), \ldots, f_t(a)$ de números reales y contar el número de variaciones de signo de los miembros no nulos de esta sucesión. Sea $V(a)$ este número. Entonces se tiene el siguiente:

Teorema de Sturm. *Sean* a *y* b *números reales tales que* $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ *y* $a < b$. *Entonces* $V(a) - V(b)$ *es el número de raíces reales distintas entre* a *y* b.

Este teorema establece que si a es *menor* que b, el entero $V(a)$ es *mayor* que o igual a $V(b)$. Cuando $f(x)$ tiene raíces múltiples, este cálculo las ignora. Si $f_t(x)$ no es una constante (hay raíces múltiples) se puede dividir $f(x)$ por $f_t(x)$ obteniendo un polinomio que puede estudiarse con el teorema de Sturm. Por esto se restringirán los ejercicios al caso en que $f(x)$ no tiene raíces múltiples y, por lo tanto, $f_t(x) = \pm 1$.

No se intentará aquí dar una demostración del teorema de Sturm.

Ejemplo ilustrativo

Aislar las raíces reales de $x^4 - 24x^2 + 16x + 12 = 0$ usando el teorema de Sturm.

Solución

$$f'(x) = 4x^3 - 48x + 16 = 4(x^2 - 12x + 4), \quad f_1 = x^3 - 12x + 4.$$

Se arreglan los cálculos como sigue:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
 & 2x - 1 & x + 1 & x \\
\hline
2x - 1 & x^2 - x - 1 & x^3 - 12x + 4 & x^4 - 24x^2 + 16x + 12 \\
\cline{2-2}
 & 4x^2 - 4x - 4 & x^3 - x^2 - x & x^4 - 12x^2 + 4x \\
 & 4x^2 - 2x & x^2 - 11x + 4 & -12x^2 + 12x + 12 \\
 & -2x - 4 & x^2 - x - 1 & \\
 & -2x + 1 & -10x + 5 & \\
 & -5 & &
\end{array}$$

Las funciones de Sturm son

$$\begin{aligned}
f_0 &= x^4 - 24x^2 + 16x + 12, \\
f_1 &= x^3 - 12x + 4, \\
f_2 &= x^2 - x - 1 \\
f_3 &= 2x - 1, \\
f_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Usando el teorema 7 se calculan los signos en una cota superior y una inferior, siendo éstos $+ - + - +$ en L y $+ + + + +$ en U.

Por consiguiente, el polinomio tiene 4 raíces reales. Los signos en $x = 0$ son $+ + - - +$ y $V(0) = 2$. Por lo tanto, hay dos raíces positivas y dos negativas. Se completa el trabajo anotando los resultados en una tabla:

	L	0	U	1	2	4	5	-1	-5	-6
f_0	+	+	+	+	—	—	+	—	—	+
f_1	—	+	+	—				+		
f_2	+	—	+	—				+		
f_3	—	—	+	+				—		
f_4	+	+	+	+				+		
V	4	2	0	2				3		

Obsérvese que $f(x) = 0$ tiene un número impar de raíces reales entre 1 y 2 y así no es necesario calcular f_1, f_2, f_3, f_4 en $x = 2$, pero sí saber que hay una raíz real en el intervalo $1 < x < 2$. También

$$f(x) = x^2(x^2 - 24) + 16x + 12 < 0$$

para $x = 3, 4,$ y trivialmente positivo para $x = 5$, $f(x) < 0$ para $x = -1, -2, -3, -4$ y $f(-5) = 25 - 60 + 12 < 0$,

$$f(-6) = 36 \cdot 12 - 16 \cdot 6 + 12 > 0.$$

Por lo tanto $1 < r_1 < 2$, $4 < r_2 < 5$, $-1 < r_3 < 0$, $-6 < r_4 < -5$.

EJERCICIOS

Aislar las raíces reales de las ecuaciones siguientes usando el teorema de Sturm:

(a)	$x^4 - 4x + 2 = 0$	(i)	$x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0$
(b)	$x^4 - 8x^2 - 20x - 21 = 0$	(j)	$2x^3 - 4x + 1 = 0$
(c)	$x^4 - 32x + 40 = 0$	(k)	$x^3 + 3x + 2 = 0$
(d)	$x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$	(l)	$x^3 + 3x - 1 = 0$
(e)	$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x + 2 = 0$	(m)	$x^3 + 3x^2 + 4 = 0$
(f)	$x^4 - 8x^3 - 16x + 12 = 0$	(n)	$x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0$
(g)	$x^4 - 4x^3 - 8x - 4 = 0$	(o)	$x^3 - 18x + 12 = 0$
(h)	$x^4 - 24x^2 + 84x - 13 = 0$	(p)	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

9. El método de Horner. Las raíces irracionales de un polinomio $f(x) = 0$ pueden calcularse, con tantas cifras decimales como se quiera de aproximación, utilizando varios métodos. En todos ellos primero deben aislarse las raíces. Se puede suponer que la raíz r que se va a estudiar es positiva, pues de no serlo bastaría reemplazar $f(x)$ por $(-1)^n f(-x)$.

Supóngase que se ha encontrado un intervalo $a < x < b$ en el cual hay una y solamente una raíz real r de $f(x)$. Supóngase también que r es una raíz simple, y, por lo tanto, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. Finalmente supóngase que $b - a \leqq 1$, y, por esto, que r está en el intervalo $a < r < a + 1$.

En el *método de Horner* se disminuyen las raíces en a de tal manera que el polinomio obtenido

$$g(x) = b_0x^n = b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$$

tenga una raíz $s = r - a$ entre 0 y 1. Obsérvese que $b_n = f(a)$ y que un valor $x = c + a$ cercano a r es menor que la raíz r solamente si $g(c)$ tiene el mismo signo que b_n.

En los casos usuales, a es un entero, la parte entera de la raíz r. Para calcular el primer dígito después del punto decimal se escribe

$$g(x) \equiv b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + g_0(x),$$

en donde $g_0(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-3}x^3 + b_n$. Si s es un número pequeño, el valor de $g_0(s)$ estará entre los dos valores $g_0(0) = b_n$ y

$$g_0(1) = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-3} + b_n = b_n'.$$

Entonces s estará entre una raíz s_1 de la ecuación de segundo grado $b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n = 0$ y una raíz s_2 de

$$b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n' = 0.$$

Se resuelven estas ecuaciones, obteniendo un entero $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$ tal que $d/10$ es el primer dígito de s.

Después se disminuyen las raíces de $g(x)$ en $d/10$ obteniendo una ecuación

$$h(x) \equiv c_0x^n + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

El signo de c_n será el mismo que el de b_n [pero no necesariamente igual al del término a_n del polinomio original $f(x)$] si

$a + d/10 \leqq r$. Así se registrará una sobrestimación de d en este punto. Una subestimación dará una raíz aproximada $t > 1/10$ de $h(x) = 0$.

Si se ha determinado correctamente d, la ecuación $h(x) = 0$ tendrá una raíz t entre 0 y $1/10$. Las potencias $t^2, t^3, \ldots, t^n$ son números reales pequeños y t estará generalmente entre dos números

$$t_1 = -\frac{c_n}{c_{n-1}}, \qquad t_2 = -\frac{c_n'}{c_{n-1}},$$

en donde

$$c_n' = c_0(1/10)^n + c_1(1/10)^{n-1} + \ldots + c_{n-2}(1/10)^2 + c_n.$$

Además, la diferencia $|t_2 - t_1|$ será pequeña y se podrá determinar un dígito e tal que

$$r = a + d/10 + e/100$$

con dos cifras decimales.

El proceso de disminuir las raíces puede continuar en todos los casos en que, después de varios pasos, este proceso de encerrar la raíz entre las raíces de dos ecuaciones lineales sea válido y dé varios dígitos en lugar de uno. Se ilustrará en seguida este hecho.

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular la raíz real positiva de $x^3 - 6x - 1 = 0$ haciendo tres transformaciones.

Solución

La ecuación tiene una raíz positiva y ninguna raíz racional. Además $f(2) = -5$, $f(3) = 8$, de donde, $2 < r < 3$.

$$\begin{array}{l} 1 + 0 - 6 - 1\,\underline{|2} \\ \quad 2 + 4 - 4 \\ \hline \quad 2 - 2 - 5 \\ \quad 2 + 8 \\ \hline \quad 4 + 6 \\ \quad 2 \\ \hline 1 + 6 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} g(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 5 \\ 6s^2 + 6s - 5 = 0 \\ s = \dfrac{-6 + \sqrt{36 + 120}}{12} \\ \quad = \dfrac{-6 + \sqrt{156}}{12} \\ 12 < \sqrt{156} < 13, \qquad 0.d = 0.5 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
1 + 6.0 + 5.00 - 11.000 \,\underline{|0.9} \\
\phantom{1 + {}} \underline{0.9 + 6.21 + 10.089} \\
\phantom{1 + {}} 6.9 + 11.21 - 0.911 \\
\phantom{1 + {}} \underline{0.9 + 7.02} \\
\phantom{1 + {}} \underline{7.8 + 18.23} \\
\phantom{1 + {}} 0.9 \\
1 + \overline{8.7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
h(x) = x^3 + 8.7x^2 + 18.23x - 0.911 \\
t = \dfrac{0.911}{18.23} = 0.049^{+} \\
e = 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1 + 8.70 + 18.2300 - 0.911000 \,\underline{|0.04} \\
\phantom{1 + {}} \underline{0.04 + 0.3496 - 0.743184} \\
\phantom{1 + {}} 8.74 + 18.5796 - 0.167816 \\
\phantom{1 + {}} \underline{0.04 + 0.3512} \\
\phantom{1 + {}} \underline{8.78 + 18.9308} \\
\phantom{1 + {}} 0.04 \\
1 + \overline{8.82}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
k(x) = x^3 + 8.82x^2 + 18.9308x - 0.167816 \\
u_1 = \dfrac{0.167816}{18.9308} = 0.0088 \\
u_2 = \dfrac{0.166933}{18.9308} = 0.0088 \\
-r = 1.9488, \\
r = -(1.9488) \text{ aproximadamente}
\end{array}
$$

EJERCICIOS

1. Usar el método de Horner para encontrar todas las raíces reales de las ecuaciones siguientes. Háganse a lo sumo *tres* transformaciones para obtener *cuatro* cifras decimales en todos los casos.

(*a*) $x^3 = 2$

(*b*) $x^3 = 3$

(*c*) $x^3 = 7$

(*d*) $x^3 - 5x - 1 = 0$

(*e*) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

(*f*) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

(*g*) $x^3 + 3x - 1 = 0$

(*h*) $x^3 - 2x - 6 = 0$ *Resp.:* 2.1799.

(*i*) $2x^3 - 6x^2 - 1 = 0$ *Resp.:* 3.0536.

(*j*) $x^3 + 9x - 6 = 0$ *Resp.:* 0.6378.

(*k*) $x^3 + 3x + 6 = 0$ *Resp.:* -1.2879.

(*l*) $x^3 + 9x + 2 = 0$ *Resp.:* -0.2208.

(*m*) $x^3 - x^2 - 3 = 0$ *Resp.:* 1.8637.

(*n*) $x^3 - x^2 - 5 = 0$ *Resp.:* 2.1154.

2. Usar el método de Horner para encontrar todas las raíces reales de las siguientes ecuaciones, efectuando dos transformaciones:

(a) $x^4 - 3x + 1 = 0$ (e) $x^4 - x^3 - 3x - 1 = 0$
(b) $x^4 - 4x + 2 = 0$ (f) $x^4 - 6x - 1 = 0$
(c) $x^4 + x^3 - 2 = 0$ (g) $x^4 + x^3 - 1 = 0$
(d) $x^4 + 2x^3 - x + 1 = 0$ (h) $x^4 - 7x^3 - 2 = 0$

10. Otros métodos (CURSO COMPLETO). La derivada de $f'(x)$ es un polinomio $f''(x)$. Supóngase que se ha aislado una raíz real simple r de $f(x)$ en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ y que el signo de $f''(x)$ es el mismo en todo el intervalo. Entonces o bien $f(a)$ o $f(b)$ tendrá el mismo signo que $f''(x)$ en el intervalo. Sea g este número. Puede demostrarse que

$$c = g - \frac{f(g)}{f'(g)}$$

es más cercano a r que g. Después de calcular c, se hace un segundo cálculo y se determina un número

$$c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

que estará más cerca de r que c. Este método puede continuar-

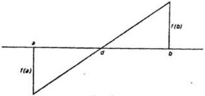

FIG. 9

se tanto como se quiera. Este procedimiento para aproximar r se conoce como el *método de Newton.*

Otro método para calcular r es el llamado *método de interpolación.* Con la teoría de los triángulos semejantes y la figura 9 se demuestra que

$$d = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Además, en el caso descrito para el método de Newton, d está más cerca de r que a o b, pues, en efecto, puede demostrarse que si se calcula c como antes, entonces r está entre c y d. De los tres métodos analizados, el método de interpolación es el que requiere menos teoría, pero los cálculos no son simples. Por ello no se dan ejercicios especiales sobre este método y el método de Newton. Si se desean ejercicios, pueden tomarse los del artículo 8.

Ejemplos ilustrativos

I. Con el método de Newton aproximar la raíz real positiva de

$$x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Solución

La raíz está entre 2 y 3. Además $f'(x) = 3x^2 - 6$,

$$f''(x) = 6x > 0$$

para $2 \leqq x \leqq 3$. Pero $f(2) = -5$, $f(3) = 8$, y, por lo tanto, $g = 3$. Entonces

$$c = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{8}{21} = 2.7, \text{ aproximadamente.}$$

También

$$c_1 = 2.7 - \frac{f(2.7)}{f'(2.7)} = 2.7 - \frac{2.483}{15.87} = 2.55, \text{ aproximadamente.}$$

Solución 2

En esta solución se disminuyen las raíces en cada caso, pero se usa el método de Newton.

$$\begin{array}{llll|l}
1 & +0 & -6 & -1 & 3 \\
 & 3 & +9 & +9 & \\ \hline
 & 3 & +3 & +8 & \\
 & 3 & +18 & & \\ \hline
 & 6 & +21 & & \\
 & 3 & & & \\ \hline
1 & +9 & & &
\end{array}$$

$$g(x) = x^3 + 9x^2 + 21x + 8$$

$$g'(x) = 3x^2 + 18x + 21$$

$$c = 0 - \frac{g(0)}{g'(0)} = \frac{-8}{21} = -0.3$$

$$\begin{array}{l} 1 + 9.0 + 21.00 + 8.000 \,\underline{|-0.3} \\ -0.3 - 2.61 + 5.517 \\ \hline 8.7 + 18.39 + 2.483 \\ -0.3 - 2.52 \\ \hline 8.4 + 15.87 \\ -0.3 \\ \hline 1 + 8.1 \end{array}$$

$$h(x) = x^3 + 8.1x^2 + 15.87x + 2.483$$

$$-\frac{h(0)}{h'(0)} = \frac{-2.483}{15.87} = -0.15$$

Resp.: $r = 3 - 0.3 - 0.15 = 2.55.$

II. Con el método de interpolación, calcular la raíz positiva de $x^3 - 6x - 1 = 0$.

Solución

$f(2) = -5$, $f(3) = 8$ y, por lo tanto,

$$d = \frac{3f(2) - 2f(3)}{f(2) - f(3)} = \frac{-15 - 16}{-13} = \frac{31}{13} = 2.37$$

En el siguiente paso se calcula

$$\frac{3f(2.37) - 2.37f(3)}{f(2.37) - f(3)}$$

Es conveniente hacer estos cálculos solamente con una máquina calculadora. Si en lugar de esto se disminuyen en 2 las raíces, se obtiene

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 5,$$

y entonces $g(1) = 8$, $a = 0$, $b = 1$, y

$$d = \frac{g(0)}{g(0) - g(1)} = \frac{-5}{-13} = 0.37^{+}$$

es necesariamente el mismo valor que se obtuvo antes. Ni el valor 0.3 ni el de 0.4 son tan buenos como el de 0.5 obtenido con el método de Horner. Se seguirá el proceso, pero usando el valor 0.5. Restando 0.5 a las raíces, se obtiene

$$h(x) = x^3 + 7.5x^2 + 12.75x - 0.375,$$

y la siguiente aproximación de acuerdo con el método de interpolación es

$$\frac{0.1h(0)}{h(0) - h(1)} = \frac{0.0375}{1.351} = 0.027,$$

que, en este ejemplo, es menos bueno que el valor correspondiente obtenido, en el mismo paso, con el método de Horner.

11. El concepto de función. Se concluirá este capítulo con un estudio del concepto matemático de *función*. El principio de esta idea ya se ha usado en el proceso de aislar las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ mediante el uso de una tabla que consta de valores $x = a$ y sus correspondientes valores $f(a)$.

Se define una *variable* como un *símbolo* junto con un conjunto de objetos que se llamará su *dominio*. Si el dominio consta de un solo objeto, al símbolo se le llamará una *constante.*

El concepto de función comprende dos variables y una correspondencia. Se da la siguiente:

Definición. *Sean* x *y* y *dos variables relacionadas de tal forma que a cada elemento del dominio de* x *le corresponde uno o más elementos del dominio de* y. *Entonces* y *se llama una función de* x.

El papel que juega la variable y en la propiedad de relación es distinto del jugado por x. Se acostumbra llamar a x la *variable independiente* y a y la *variable dependiente.*

Si a cada elemento del dominio de la variable x le corresponde *exactamente* un elemento del dominio de y, se dice que y es una función *unívoca* o *univalente* de x. En todos los casos restantes se dice que y es una función *multivalente* de x. Muchas de las funciones que el estudiante se encuentra en la geometría analítica son multivalentes, y en la trigonometría se encuentran funciones con una infinidad de valores o *infinitamente valuadas.*

Se indicará que y es una función de x escribiendo $y = f(x)$. Desde luego se usan también otras letras en lugar de f o de x y y.

Si en una función univalente $y = f(x)$ se sustituye x por un elemento a del dominio de x, al correspondiente elemento del dominio de la y se le denota con $f(a)$ y se le llama *valor* *de* $f(x)$ *para* $x = a$. Este es el origen del lenguaje ya usado para los valores $f(a)$ de los polinomios $f(x)$ en $x = a$.

Esta definición de función puede extenderse a funciones $z = f(x, y)$ de dos variables independientes x, y o, más generalmente, a funciones de n variables. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables independientes y y una variable. Supóngase que a cada colección $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos, a_1 del dominio de x_1, a_2 del de $x_2, \ldots, a_n$ del de x_n, le corresponden uno o más elementos $f(a_1, \ldots, a_n)$ del dominio de y. Entonces a la variable dependiente y se le llama una *función* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se dice que y es una función univalente o unívoca de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si cada $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es única.

El concepto que se acaba de describir es de capital importancia en todas las matemáticas. Se recomienda al estudiante y al instructor que se hagan ilustraciones de este concepto tanto de la vida ordinaria como de las matemáticas.

12. Operaciones con funciones. Los símbolos n, a, b, c, i, $j, \ldots$ del capítulo I eran variables cuyo dominio común era el conjunto de todos los números naturales. Todas las variables del capítulo II tenían como dominio el conjunto de todos los números enteros, y los dominios del capítulo III eran otros sistemas numéricos.

El dominio de una variable no debe ser necesariamente un sistema numérico. Sin embargo, la mayor parte de las variables consideradas en las matemáticas elementales tienen como dominios subconjuntos del sistema de los números complejos. Se limitará ahora la atención a tales variables.

Si $y = f(x)$ y $z = g(x)$ son dos funciones de la misma variable x, su suma $y + z = h(x) = f(x) + g(x)$ es aquella función cuyos valores $h(a)$ están definidos por

$$h(a) = f(a) + g(a)$$

para toda a del dominio de x. Análogamente se definen la diferencia $f(x) - g(x)$ y el producto $f(x)g(x)$ de funciones.

El cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

es una función definida solamente para aquellos números a del dominio de x tales que $g(a)$ es distinto de cero.

Obsérvese ahora que todo polinomio $f(x)$ define una función $y = f(x)$ en donde el dominio de x y el de y son subconjuntos del sistema de los números complejos. Si $g(x)$ es un polinomio y $z = g(x)$ es la función correspondiente, entonces la suma formal del polinomio $f(x) + g(x)$ definida en el capítulo IV determina la función suma $y + z$. De manera análoga, $y - z$ y yz están respectivamente definidos por la diferencia y el producto de los polinomios correspondientes. La función definida por su cociente formal es la función cociente acabada de definir, y el término *función racional,* que ya se ha usado para el cociente formal, tiene su origen en el concepto de función.

Función cero es aquella cuyos valores son todos cero. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones con los mismos dominios para x y y, se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son idénticas, y se escribe

$$f(x) \equiv g(x)$$

(léase "f de x es idénticamente igual a g de x") si es cierto que $f(a)$ y $g(a)$ son los mismos elementos del dominio de y para toda x del dominio de x. Entonces $f(x) \equiv g(x)$ si y sólo si $f(x) - g(x)$ es la función cero, esto es, $f(x) - g(x) \equiv 0$. Esto es lo que inspira la definición que se ha dado de igualdad entre polinomios. Por esto mismo se consideraron iguales aquellos polinomios cuyos coeficientes eran todos cero y también por esto se usó la notación $f(x) \equiv g(x)$ para polinomios iguales.

Las funciones definidas por polinomios y funciones racionales son funciones definidas con una fórmula algebraica. En el artículo siguiente se darán más ejemplos. En el capítulo

VIII se definirán las funciones de la trigonometría por un procedimiento geométrico que incluye la medida angular y el uso de sistemas de coordenadas.

13. Las ecuaciones de una curva. Si los dominios de la variable independiente x y la variable dependiente $y = f(x)$ son subconjuntos del sistema de los números reales, se dice que y es una *función real de una variable real* x. Entonces se tiene la correspondiente *gráfica* de la función usando un sistema de coordenadas en el plano. Esta consta del conjunto de puntos P cuyas coordenadas $x = a$ y $y = b$ son tales que $b = f(a)$. Una gráfica puede ser una recta, una circunferencia u otra forma geométrica que pertenezca a la familia de lo que los matemáticos llaman *curvas.*

Sea C una curva definida geométricamente. Por ejemplo, una circunferencia es una curva plana cuyos puntos están a una distancia fija r de un punto fijo llamado *centro.* Supóngase también que se tiene un polinomio $F(x, y)$ con coeficientes reales. Entonces se dice que la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

es *una ecuación de la curva C* si

1. *Todo punto de* C *tiene coordenadas* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, $\mathrm{y} = \mathrm{b}$ *tales que* $\mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$.

2. *Toda pareja de números reales* (a, b) *tal que* $\mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$ *define un punto con coordenadas* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, $\mathrm{y} = \mathrm{b}$ *que está en* C.

La geometría analítica plana consiste en el estudio de aquellas curvas cuyas ecuaciones son ecuaciones polinómicas

$$F(x, y) = 0,$$

y en los dos últimos artículos del capítulo VIII se volverá brevemente a este estudio.

Una ecuación $F(x, y) = 0$ de una curva C define una función $y = f(x)$ cuya gráfica es C. Esta función está definida por la correspondencia que asocia a cada número real $x = a$ las raíces reales $y = b$ de la ecuación

$$F(a, y) = 0$$

y se llama una *función algebraica* de x. Cuando el grado en y de $F(x, y)$ es mayor que 1, una ecuación $F(a, y)$ puede tener varias raíces reales y entonces y será una función multivalente de x. Por ejemplo, la función definida por $x^2 + y^2 = 1$ es una función real de una variable real x, cuyo dominio es el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$. Cada valor $x = a$ tal que $-1 < a < 1$ corresponde a dos valores $\sqrt{1 - a^2}$, $-\sqrt{1 - a^2}$ de y, y, por tanto, a dos puntos en el círculo.

CAPITULO VIII

VECTORES EN EL PLANO (CURSO COMPLETO)

1. Vectores. En este capítulo se relacionan la teoría algebraica de los vectores y las ecuaciones lineales con la trigonometría y la geometría analítica. Esta presentación proporciona un fundamento firme para estas materias relacionadas entre sí, así como una condensación del material que es común a todas ellas. Se considera todo este capítulo como materia opcional.

Un *vector* en el plano es un par de números reales (x, y). Se le puede interpretar *geométricamente* o bien como el punto

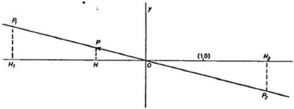

FIG. 10

P en el plano cuyas coordenadas relativas a un sistema fijo de coordenadas cartesianas rectangulares son x y y, o bien como el rayo o segmento rectilíneo dirigido OP desde el origen O a P. También se puede interpretar *algebraicamente* como el número complejo $x + yi$. Generalmente aquí se escribirá

$P = (x, y)$, y en este caso se emplearán las palabras *vector* y *punto* indistintamente.

Si t es cualquier número real, el producto $t(x, y)$ del escalar t por el vector (x, y) es el vector (tx, ty). Se construye la figura 10 en la que OHP, OH_1P_1, OH_2P_2 son evidentemente triángulos rectángulos semejantes. Entonces, si P no está en el origen, y $P = (x, y)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, se usan las propiedades de los triángulos semejantes para obtener

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = t_1 \geqq 0, \qquad \frac{x_2}{x} = \frac{y_2}{y} = t_2 \leqq 0.$$

Resulta que si $(x, y) \neq (0, 0)$, cada punto de la misma recta que pasa por O y por (x, y) es un vector $t(x, y)$. Además $t \geqq 0$ o bien $t \leqq 0$ según que $t(x, y)$ esté o no en el mismo rayo o semirrecta que parte de O y pasa por (x, y).

Recíprocamente, cada vector $t(x, y)$ define un punto sobre la recta determinada por O y (x, y). Pues si $P_1 = (tx, ty)$, los catetos del triángulo rectángulo OP_1H_1 y del OPH son proporcionales, los triángulos rectángulos son semejantes y los puntos O, P y P_1 son colineales.

La *norma* de un vector (x, y) es el número real no negativo $x^2 + y^2$. La *longitud* de (x, y) es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqq 0.$$

Un vector de longitud 1 se llama vector *unitario*.

Todos los vectores unitarios son puntos de un círculo con centro en el origen y radio 1. Si P es cualquier punto excepto O, hay *dos* vectores unitarios precisamente en la recta que pasa por O y P. Estos son

$$U = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \qquad U_0 = \left(\frac{-x}{r}, \frac{-y}{r}\right),$$

y $P = rU = -rU_0$. Así, si se elige cualquier vector unitario en una recta de O a U, todos los vectores P sobre la recta tienen la forma tU en que t es un número real. Entonces tU está en el mismo rayo o semirrecta desde O hacia U si y solamente si $t \geqq 0$, y el número real no negativo t es la longitud de P.

EJERCICIOS ORALES

1. Dar las normas y longitudes de cada uno de los vectores $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$, $(3, 4)$, $(1, 1)$, $(5, -12)$, $(6, 8)$, $(3, -3)$ $(-6, -8)$, $(-10, -24)$.
2. Dar un vector unitario sobre el mismo rayo que cada uno de los vectores no nulos del ejercicio oral 1.
3. Dar un vector unitario sobre la misma recta pero no en el mismo rayo que cada vector no cero del ejercicio oral 1.
4. Expresar cada vector no nulo del ejercicio oral 1 en la forma $r(u, v)$ donde $r > 0$ y (u, v) es un vector unitario.
5. ¿Qué vectores en el ejercicio oral 1 son colineales y cuáles están en el mismo rayo?

2. Suma de vectores.

2. Suma de vectores. La *suma*

$$P_1 + P_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

de dos vectores $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ se define como el vector $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. En la figura 11, P_1 y P_2 son dos vectores dados. Se completa un paralelogramo trazando una recta que pase por P_1 paralelamente a OP_2 y una recta por P_2

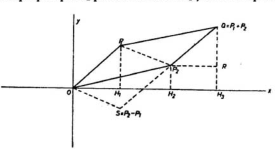

FIG. 11

paralela a OP_1. Estas rectas se encuentran en un punto Q, y luego se demostrará que $Q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = P_1 + P_2$.

El método gráfico para construir la suma de dos vectores se llama la *ley del paralelogramo para la suma de vectores.* En el caso del diagrama se ve que los triángulos OP_1H_1 y P_2QR son iguales, y así

$$\overline{P_2R} = \overline{H_2H_3} = x_1,$$
$$\overline{OH_3} = \overline{OH_2} + \overline{H_2H_3} = x_1 + x_2,$$
$$\overline{H_3Q} = \overline{H_3R} + \overline{RQ} = \overline{H_2P_2} + \overline{RQ} = y_2 + y_1.$$

La demostración completa tan sólo requiere la construcción de diagramas adicionales y se omitirá.

El vector (0, 0) tiene la propiedad de que

$$(0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

A (0, 0) se le llama *vector cero.* El vector

$$(-x, -y) = -1(x, y)$$

tiene la propiedad de que

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

y así se le llama el *negativo* de (x, y) y se designa por $-(x, y)$; es un vector de igual longitud y que está en la misma recta que pasa por O como (x, y), pero no está en el mismo rayo.

La diferencia $P_2 - P_1$ de dos vectores se da por $(x_2, y_2) - (x_1, y^1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. En la figura 11, OS es paralela a P_1P_2, y la longitud de OS es la de $\overline{P_1P_2}$. Entonces $P_2 = P_1 + S$, de modo que $S = P_2 - F_1$. Se deduce que la distancia no dirigida d entre P_1 y P_2 se obtiene por la fórmula

$$(1) \qquad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EJERCICIOS ORALES

1. Calcular las coordenadas de $P_1 + P_2$ y $P_2 - P_1$ para cada uno de los pares de puntos P_1, P_2 siguientes:

(a)	$(2, -1), (5, 3)$	*(d)*	$(1, 2), (-4, -10)$
(b)	$(-1, 0), (1, 1)$	*(e)*	$(0, -1), (5, 11)$
(c)	$(-1, -2), (2, 2)$	*(f)*	$(3, -2), (5, -1)$

2. Calcular la longitud de $\overline{P_1P_2}$ para cada segmento rectilíneo $\overline{P_1P_2}$ del ejercicio oral 1.

3. Medida angular. Un *ángulo* θ puede definirse por la *rotación en el plano de una semirrecta o rayo alrededor de su punto extremo u origen.* Luego el rayo empieza su rotación

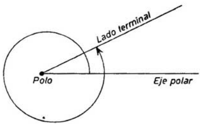

Fig. 12

desde la posición que se llama *lado inicial* del ángulo θ y la termina en la posición llamada *lado terminal* de dicho ángulo.

Los ángulos pueden compararse eligiendo el mismo rayo como lado inicial para todos ellos. Desígnese este rayo o lado inicial con el nombre de *eje polar* y su punto extremo con el de *polo*. En la figura 12 se señala una rotación contra las manecillas del reloj de $1\frac{1}{12}$ de revolución (rotaciones completas). Se medirán siempre las rotaciones en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con números reales positivos, y las del mismo sentido con números reales negativos. El *ángulo cero* es aquel en que no ha habido rotación. Debe quedar bien claro ahora que si se toma una revolución como unidad de medida se establece una correspondencia biunívoca entre el sistema de números reales y el conjunto de todos los ángulos.

No resulta conveniente el uso de la revolución como unidad de medida, y es costumbre dividirla en 360 partes iguales llamadas *grados*. Así $360° = 1$ revolución, y el ángulo de la figura 12 es de 390°.

La medida angular expresada tomando por unidad una revolución se basa en la propiedad de la geometría plana que establece que *un ángulo central tiene por medida el arco de circunferencia comprendido entre sus lados.* El uso de esta propiedad puede mostrarse algo más explícitamente introduciendo una nueva unidad de medida definiendo el *ángulo de un radián,* que consiste en *el ángulo cuyo arco correspondiente tiene una longitud igual a la del radio.* Como que la circunferencia mide 2π unidades expresadas en radianes, se tienen las relaciones

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} = 360°$$

entre las citadas clases de unidades. En los artículos próximos se usará el radián como unidad de medida.

Los ángulos de la tabla siguiente se encuentran con frecuencia en los ejercicios de trigonometría.

Revoluciones	Grados	Radianes
0	0	0
1/12	30	$\pi/6$
1/8	45	$\pi/4$
1/6	60	$\pi/3$
1/4	90	$\pi/2$
1/2	180	π
3/4	270	$3\pi/2$
1	360	2π

EJERCICIO

Hágase una tabla parecida a la anterior para los ángulos obtenidos añadiendo $\pi/2$, π, $3\pi/2$, $-\pi/2$ a cada uno de los cuatro ángulos primeros de la misma.

4. Coordenadas polares y funciones trigonométricas. La representación de un vector como un segmento rectilíneo dirigido de una longitud dada sugiere la introducción de un nuevo tipo de sistema de coordenadas en el plano. Se elige una unidad de medida así como un polo O y un eje polar como se definió en el artículo 3. Entonces cada par de números rea-

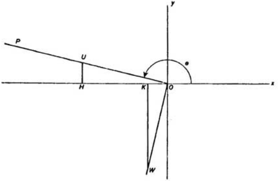

FIG. 13

les $[r, \theta]$ tal que $r \geqq 0$ define un rayo que es el lado terminal de un ángulo de θ radianes cuyo lado inicial es el eje polar. Hay precisamente un punto P en este rayo a una distancia de r unidades a partir de O, y a $[r, \theta]$ le damos el nombre de *coordenadas polares de P*.

Recíprocamente, sea P el punto dado. Entonces la distancia $r = \overline{OP}$ es única y se puede elegir θ de modo que sea un ángulo cuyo lado terminal esté en el rayo a partir de O pasando por P. Si $r = 0$, el ángulo θ es arbitrario. Por otra parte, *dos determinaciones cualesquiera de θ se diferencian por un múltiplo entero de 2π radianes.*

Pueden relacionarse las coordenadas polares con las rectangulares *haciendo que el eje polar coincida con el eje positivo* x *y que el polo sea el origen.* La relación entre las coordenadas en los dos sistemas envuelve, pues, la introducción de las llamadas *funciones trigonométricas.*

En la figura 13 se supone primero que solamente se da θ. Entonces el lado terminal de θ determina un vector unitario único, U, en él. La coordenada x, u de U, se llama el *coseno* de θ, y la coordenada y, v, se llama *seno* de θ, y se escribe

$$u = \cos\theta \qquad v = \operatorname{sen}\theta.$$

Ahora $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son números reales determinados unívocamente para cada número real θ, y así quedan definidas dos funciones trigonométricas. Estas son funciones reales de una variable real, θ, definida para todos los valores reales de θ.

Obsérvese que como U es un vector unitario se tiene la relación

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

y, de este modo, que $-1 \leqq \operatorname{sen}\theta \leqq 1$, $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$. Recíprocamente, si g es un número real cualquiera tal que $-1 \leqq g \leqq 1$, los vectores (g, h) y (h, g) en los que $h = \sqrt{1-g^2}$ son vectores unitarios y g es el seno de un ángulo y el coseno de otro.

Ahora se pasará a la mencionada relación entre las coordenadas polares y las rectangulares. Si P es un punto cuyas coordenadas polares son $[r, \theta]$, sus coordenadas rectangulares (x, y) tienen la propiedad de que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $(x, y) = r(u, v)$, de modo que $x = ru$, $y = rv$. Esto es lo mismo que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Recíprocamente, si se dan x y y, y $(x, y) \neq (0, 0)$, los números r y θ se determinan por las relaciones

$$(2) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}.$$

Las razones

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}, \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}, \\ \operatorname{ctg} \theta &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{x}{y}, \\ \csc \theta &= \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{r}{y} \end{aligned}$$

se llaman *tangente, secante, cotangente* y *cosecante* de θ, respectivamente. Nótese que el primer par de estas funciones se define para todos los números reales θ exceptuando los múltiplos enteros impares de $\pi/2$, por cuanto en los valores últimos $\cos \theta = 0$, $\operatorname{sen} \theta = \pm 1$. El segundo par se define para todos los números reales θ, exceptuando los múltiplos enteros de π, ya que en los valores últimos $\operatorname{sen} \theta = 0$, y $\cos \theta = \pm 1$.

Se dice que dos ángulos son *coterminales* si tienen los mismos lados inicial y terminal. Entonces estos ángulos difieren entre sí por múltiplos enteros de 2π radianes. Resulta evidente que tales ángulos tienen las mismas funciones trigonométricas, es decir,

$$f(\theta + 2n\pi) \equiv f(\theta)$$

para todos los enteros n, todos los números reales θ, y $f(\theta)$ interpretada como $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$, $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{ctg} \theta$, $\sec \theta$ o $\csc \theta$.

Se terminará este estudio sobre las funciones trigonométricas con otra referencia a la figura 13. Sea $U = (u, v)$ un vector unitario cualquiera de modo que U esté en el lado terminal de un ángulo θ, y supóngase que $W = (u_0, v_0)$ esté en el lado terminal de $\phi = \theta + \pi/2$. Bájese una perpendicular desde U al eje x de modo que su pie esté en H. De modo semejante, sea K el pie de la perpendicular trazada desde W al eje x. Entonces los triángulos rectángulos UOH y KOW

tienen la misma longitud 1 como hipotenusa y la suma de sus ángulos en O es $\pi/2$. Entonces deben ser triángulos iguales y $u_0 = \pm v$, $v_0 = \pm u$. Como que el lado terminal de ϕ está en el *cuadrante siguiente* al lado terminal de θ, se ve que u_0 y v tienen signos opuestos, y v_0 y u tienen signos iguales. Pueden construirse tres diagramas y comprobar esto para todas las posiciones posibles del lado terminal de θ. Se sigue que $u_0 = -v$, $v_0 = u$ y que

$$(4) \qquad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos\theta$$

para todos los números reales θ.

EJERCICIOS

1. Usense las propiedades de los triángulos rectángulos para formar la siguiente tabla:

θ	sen θ	cos θ	tg θ	ctg θ	sec θ	csc θ
0	0	1	0	$\dots$	1	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	1

2. Extender la tabla anterior a los ángulos $\theta + \pi/2$, $\theta + \pi$, $\theta + 3\pi/2$, $\theta - \pi/2$ donde $\theta = 0, \pi/2, \pi/4, \pi/3$.

3. Determinar los valores de aquellas funciones trigonométricas cuyos valores no se dan explícitamente, si

(a) $\operatorname{sen}\theta = 3/5$, $0 < \theta < \pi/2$ *(d)* $\operatorname{ctg}\theta = -5/12$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$
(b) $\operatorname{sen}\theta = 4/5$, $\pi/2 < \theta < \pi$ *(e)* $\operatorname{ctg}\theta = 3/4$, $\operatorname{sen}\theta < 0$
(c) $\operatorname{tg}\theta = 3/4$, $\pi < \theta < 3\pi/2$ *(f)* $\sec\theta = 13/5$, $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

(g) $\csc\theta = 13/12,\ \pi/2 < \theta < \pi$ (i) $\cos\theta = 1/4,\ 0 < \theta < \pi/2$
(h) $\operatorname{sen}\theta = 1/8,\ 0 < \theta < \pi/2$ (j) $\operatorname{sen}\theta = 1/4,\ \cos\theta < 0$

5. Rotación de ejes. Si se imprime una rotación a los ejes de coordenadas en un ángulo θ como en la figura 14, el vector unitario $(1, 0)$ recibe una rotación de un vector unita-

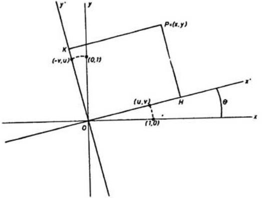

Fig. 14

rio (u, v) donde $u = \cos\theta$, $v = \operatorname{sen}\theta$. Por la fórmula (4) el vector $(0, 1)$ recibe una rotación $(-v, u)$.

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera en el plano y considérense los ejes de rotación como definiendo un nuevo sistema de coordenadas en el que $OH = x'$ es la *nueva abscisa* de P y $OK = y'$ es la *nueva ordenada* de P. Entonces las coordenadas (x, y) de H son $x'u$, $x'v$, y las de K son $-y'v$, $y'u$. Pero $OHPK$ es un rectángulo, y por las leyes del paralelogramo:

$$P = H + K = (x'u, x'v) + (-y'v, y'u).$$

Esto da las fórmulas

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x'u} - \mathbf{y'v}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{x'v} + \mathbf{y'u}. \end{cases}$$

Las fórmulas (5) se llaman *fórmulas para una rotación de ejes*. Expresan las coordenadas (x, y) de cualquier punto en el plano en función de sus coordenadas (x', y') y las coordenadas (x, y) del punto unitario en el eje x'.

Cada punto $P = (x, y)$ define un número complejo $x + yi$, y las fórmulas (5) son equivalentes a la ecuación en números complejos

$$\text{(6)} \qquad \mathbf{x} + \mathbf{yi} = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}'\mathbf{i})(\mathbf{u} + \mathbf{vi}).$$

Por la fórmula (6) se tiene $x + yi = x'u - y'v + x'vi + y'ui$. Como $(u + vi)(u - vi) = u^2 + v^2 = 1$, la fórmula (6) equivale también a

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{x}' + \mathbf{y}'\mathbf{i} = (\mathbf{x} + \mathbf{yi})(\mathbf{u} - \mathbf{vi}),$$

y por esto a

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{xu} + \mathbf{yv}, \\ \mathbf{y}' = -\mathbf{xv} + \mathbf{yu}. \end{cases}$$

Estas últimas fórmulas se llaman la *forma resuelta* de las fórmulas de rotación (5).

EJERCICIOS ORALES

1. Dar las fórmulas (5) y (8) sustituyendo u por $\cos\theta$ y v por $\operatorname{sen}\theta$.

2. Dar las fórmulas (5) y (8) para $\theta = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$.

3. Las coordenadas de un vector sobre el eje positivo x' son $(3, 4)$. ¿Cuáles son las ecuaciones (5)?

4. Las coordenadas de un vector en el eje positivo y' son $(3, 4)$. ¿Cuáles son las ecuaciones (5)?

5. Sean las ecuaciones de una rotación $x = \dfrac{3x' - 4y'}{5}$, $y = \dfrac{4x' + 3y'}{5}$. Dar las coordenadas (x', y') de P si sus coordenadas (x, y) son

(a) $(1, -1)$ *(c)* $(-1, 0)$ *(e)* $(3, 4)$
(b) $(0, 1)$ *(d)* $(2, 3)$ *(f)* $(-4, -3)$.

6. Sean las parejas de números dadas en el ejercicio oral 5 las coordenadas (x', y') de P. Dar las coordenadas de (x, y).

6. Fórmulas de la adición y productos escalares o internos. Cada ángulo θ determina una rotación de ejes y un vector unitario $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ sobre el eje positivo x'. Sea el lado inicial de un segundo ángulo ϕ el eje positivo x' y (u_2, v_2) el vector unitario sobre el lado terminal de ϕ. Entonces el ángulo $\theta + \phi$ tiene el eje positivo x como lado inicial y el lado terminal de ϕ como terminal. Se sigue que $u_2 = \cos(\theta + \phi)$, $v_2 = \operatorname{sen}(\theta + \phi)$, y que $u_2' = \cos\phi$, $v_2' = \operatorname{sen}\phi$. Se emplean las fórmulas (5) para obtener

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}(\theta+\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi. \end{cases}$$

Estas fórmulas se llaman *fórmulas de adición* de la trigonometría. Su estudio y el de sus consecuencias constituyen una parte demasiado extensa de la trigonometría para exponerlo aquí.

Dos vectores no nulos cualesquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ definen los ángulos θ y ϕ como anteriormente, donde el lado inicial de θ es el eje positivo de x, el lado terminal de θ y el inicial de ϕ coinciden con el rayo de O a P, y el lado terminal de ϕ es el rayo de O a P_2. Entonces ϕ se llama *ángulo entre* los vectores P_1 y P_2. Ahora $(x_1, y_1) = r_1(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $(x_2, y_2) = r_2(u_2, v_2)$ y

$$\cos\phi = u_2', \qquad \operatorname{sen}\phi = u_1'.$$

Se usan las fórmulas (8) con

$$x = \frac{x_2}{r_2}, \qquad y = \frac{y_2}{r_2}, \qquad u = \frac{x_1}{r_1}, \qquad v = \frac{y_1}{r_1}$$

y se obtienen

$$(10) \qquad \cos\phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

El *producto escalar* o *interno* de dos vectores cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se define como el número real $x_1x_2 + y_1y_2$.

Entonces la fórmula (10) establece que *el coseno del ángulo entre dos vectores no nulos es su producto escalar dividido entre el producto de sus longitudes.*

Si el cos $\phi = 0$, entonces $\phi = \pi/2$, ó $3\pi/2$, y el rayo que pasa por P_1 es perpendicular al que pasa por P_2. En este caso se dice que los vectores son *ortogonales*. Como $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, se ve que dos vectores no nulos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son ortogonales si y sólo si su producto escalar

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Se observa finalmente que si (x, y) es cualquier vector excepto cero, el vector $(-y, x)$ es ortogonal a (x, y). Entonces los vectores

$$(11) \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

son vectores unitarios ortogonales que pueden usarse, respectivamente, como puntos unitarios x' y y' después de una rotación de ejes tal que (x, y) esté en el eje positivo x'.

EJERCICIOS ORALES

1. Calcular el producto escalar de los pares siguientes de vectores:

(*a*) $(1, 1)$, $(2, -1)$
(*b*) $(3, -1)$, $(1, 3)$
(*c*) $(-2, 1)$, $(2, 1)$
(*d*) $(3, -4)$, $(1, 2)$
(*e*) $(-3, 4)$, $(7, 12)$
(*f*) $(1, -1)$, $(7, 12)$
(*g*) $(\sqrt{3}, -1)$, $(1, -1)$
(*h*) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(1, 0)$
(*i*) $(-1, \sqrt{3})$, $(0, 1)$

2. Dar el coseno del ángulo entre cada par de vectores en el ejercicio oral 1.

3. Dar un vector unitario ortogonal a P y un vector unitario sobre el mismo rayo como P para cada uno de los vectores $P = (1, -1)$, $P = (3, 4)$, $P = (-7, 12)$, $P = (-1, 2)$, $P = (-1, -\sqrt{3})$, $P = (-\sqrt{3}, 1)$.

7. La ecuación binomial. Cada número complejo no cero $x + yi$ corresponde a un vector $(x, y) = r(u, v)$, donde $u = x/r = \cos\theta$ y $v = y/r = \operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$x + yi = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Esta se conoce con el nombre de *forma polar* de un número complejo.

Se escribirá

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \tag{12}$$

para la unidad compleja $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y a θ se le llama la *amplitud* de $x + yi$. Si $x + yi = re^{i\theta}$ y $x_0 + y_0i = se^{i\phi}$ entonces $(x + yi)(x_0 + y_0i) = rse^{i\theta}e^{i\phi}$. Pero la fórmula (6) implica que $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) = \cos(\theta + \phi) + i\operatorname{sen}(\theta + \phi)$. Esto también resulta por multiplicación directa a partir de la fórmula (9). Puede escribirse

$$e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)} \tag{13}$$

y se ve que $(x + yi)(x_0 + y_0i) = rse^{i(\theta+\phi)}$. Se han *multiplicado* los valores absolutos r de $x + yi$ y s de $x_0 + y_0i$ y se han *sumado* sus amplitudes θ y ϕ.

La fórmula (13) puede generalizarse para un producto de cualquier número de factores y establecer que *la amplitud de un producto de números complejos es la suma de las amplitudes de sus factores,* reducido módulo 2π. Entonces si n es un entero positivo cualquiera, se tiene

$$(re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta}. \tag{14}$$

Este resultado se conoce por el *teorema de De Moivre.*

Si $c = a + bi$ es un número complejo cualquiera distinto de cero y n es un entero positivo, la ecuación $x^n = c$ se llama una *ecuación binomial.* Si se escribe $c = re^{i\theta}$, donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, los n números

$$x_j = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_j}, \qquad \theta_j = \frac{\theta + (j-1)2\pi}{n} \qquad (j = 1 \ldots n) \tag{15}$$

tienen todos la propiedad de que

$$x_j^n = re^{in\theta_j} = re^{i[\theta+2\pi(j-1)]} = re^{i\theta} = c.$$

Entonces todos ellos son raíces de la ecuación binomial $x^n = c$. Los ángulos $\theta + 2\pi(j-1)$ son coterminales. Por la fórmula (13)

$$(16) \qquad x_j = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}\zeta^{j-1}, \qquad \zeta = e^{i2\pi/n} \qquad (j = 1 \ldots n).$$

La unidad compleja ζ tiene $2\pi/n$ de amplitud y se ve que cada x_j se obtiene trazando un círculo cuyo radio es $\sqrt[n]{r}$, localizando el punto en el círculo cuyas coordenadas polares son $[\sqrt[n]{r}, \theta/n]$, y dividiendo la circunferencia del círculo en n partes iguales con puntos de división, el primero de los cuales es $[\sqrt[n]{r}, \theta/n]$.

Se sigue que los n números de la fórmula (16) son todos distintos y son las n raíces de la ecuación $x^n = c$. Entonces se puede pasar a la cuestión del *significado que tendrá el símbolo* $\sqrt[n]{c}$ *donde* n > 1 *es un entero y* c *es un número complejo cualquiera.* Defínase este símbolo como uno de los números de la fórmula (16) para el que θ_j es el mínimo ángulo no negativo. Por supuesto, otras definiciones son posibles. Pero hay que insistir en que han de ser tales que, si c es un número real, positivo, y así $\theta = 0$, entonces $\sqrt[n]{c}$ ha de ser positivo. La definición satisface esta condición puesto que $\theta/n = 0$ si $\theta = 0$. Ahora bien, no es cierto que $\sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{cd}$ para todo c y d. Efectivamente, si $n = 2$ y $c = d = -1$, las definiciones solamente posibles para $\sqrt{-1}$ son $e^{i\pi/2}$ o $e^{i3\pi/2} = -e^{i\pi/2}$, y en cualquiera de los dos casos $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$ mientras que

$$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

EJERCICIOS

1. Usar los valores de las funciones trigonométricas para hallar r y θ para los siguientes números complejos c:

(a) $c = 8$
(b) $c = -5$
(c) $c = 3i$
(d) $c = -7i$
(e) $c = 1 + i$
(f) $c = -2 + 2i$
(g) $c = 3 - 3i$
(h) $c = -4 - 4i$
(i) $c = 1 + \sqrt{3}i$
(j) $c = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{4}$
(k) $c = -\sqrt{3} + i$
(l) $c = -2\sqrt{3} - 2i$
(m) $c = 4\sqrt{3} - 4i$

2. Hallar los siguientes productos en la forma polar dando, en cada caso, r y θ del producto:

(a) $(1 + \sqrt{3}i)(1 + i)^7$
(b) $(-2 + 2i)(3 - 3i)^2$
(c) $(1 + i)^{18}(\sqrt{3} + 1)^{10}$
(d) $\left(\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)$
(e) $(-2\sqrt{3} - 2i)^6(1 - i)^7$
(f) $(-2 - 2i)^{120}$
(g) $(2\sqrt{3} - 2)^{17}$
(h) $(-\sqrt{3} + 1)^{11}(-1 + i)^{25}$

3. Hallar las soluciones en forma polar de $x^n = c$ en los casos siguientes:

(a) $n = 3,\ c = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$
(b) $n = 3,\ c = e^{\frac{2}{3}i\pi}$
(c) $n = 6,\ c = -1$
(d) $n = 8,\ c = 64$
(e) $n = 4,\ c = \sqrt{3} + i$
(f) $n = 3,\ c = -8i$
(g) $n = 3,\ c = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
(h) $n = 5,\ c = (-1 + i)^2$
(i) $n = 6,\ c = -\sqrt{3} - i$
(j) $n = 8,\ c = -1 - \sqrt{3}i$

8. Ecuaciones de las rectas.

Una ecuación

$$ax + by + c = 0 \tag{17}$$

con coeficientes reales se llama *ecuación lineal* si (a, b) es un vector no nulo. Tal ecuación es una *ecuación de una recta.* Efectivamente, sea (x_1, y_1) cualquier pareja de números reales tal que $ax_1 + by_1 + c = 0$ y sea L la recta que pasa por (x_1, y_1) perpendicular al rayo que partiendo de O pasa por (a, b) como en la figura 15.Entonces $P = (x, y)$ satisface la fórmula (17) si y sólo si $ax + by + c - (ax_1 + by_1 + c) = 0$, esto es, si y sólo si

$$(18) \qquad a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Pero la fórmula (18) se satisface si y sólo si $P - P_1$ es ortogonal a (a, b). Esto significa que el rayo de O a $P - P_1$ es per-

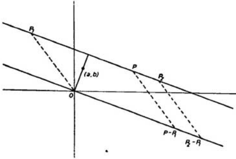

Fig. 15

pendicular al rayo de O a (a, b) y es paralelo a L; la recta que pasa por P y P_1 es paralela a L. Entonces P está en L. Esto prueba que la fórmula (17) es *una* ecuación de L.

La fórmula (18) envuelve a, b y un punto $P = (x_1, y_1)$ en L. Los números a, b se llaman *números direccionales* de L.

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos en L, el vector diferencia $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ es ortogonal a

$$(y_2 - y_1, -x_2 + x_1) \neq (0, 0).$$

Entonces una ecuación de la recta L que pasa por P_1 y P_2 es

$$(19) \qquad (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

es decir, es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos fijos dados fuera del eje de las yes.

Cualquier punto P en la recta L que pasa por dos puntos distintos P_1 y P_2 define un vector $P - P_1 = t(P_2 - P_1)$. Aquí t es la razón de las longitudes

$$t = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}.$$

El número $t > 0$ si y solamente si P está en el rayo desde O que pasa por $P_2 - P_1$. Hágase P_1 el punto cero de un sistema numérico real en la recta L, el sentido de P_1 a P_2 positivo y la distancia de P_1 a P_2 la unidad de distancia. Entonces será evidente que t es la coordenada de P en este sistema de coordenadas sobre L. También

$$P - P_1 = (x - x_1, y - y_1) = t(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

esto es,

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1). \end{cases}$$

La fórmula (20) expresa las coordenadas (x, y) de cualquier punto P sobre L en función de x_1, y_1, x_2, y_2 y la razón t de la longitud $\overline{P_1P}$ a $\overline{P_1P_2}$. Se llama un *par de ecuaciones paramétricas* de la línea L, y t se llama el *parámetro*. Nótese que si $0 \leqq t \leqq 1$ el punto P está entre P_1 y P_2. El punto medio de P_1P_2 es el punto en que $t = \frac{1}{2}$ de modo que sus coordenadas son

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_1 + \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1) &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}$$

La fórmula (17) y sus formas equivalentes (18) y (19) se refieren abajo como *formas no paramétricas* de las ecuaciones de rectas, y se observa que la fórmula (19) se obtiene de la (20) escribiendo

$$\begin{aligned} (x - x_1)(y_2 - y_1) &= t(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &= (y - y_1)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Dar las ecuaciones no paramétricas de las rectas que pasan por

(*a*)	(5, 6) y (4, —2)	(*g*)	(—9, —5) y (—6, —1)
(*b*)	(5, 3) y (5, 2)	(*h*)	(8, —2) y (—1, —8)
(*c*)	(5, —3) y (7, —3)	(*i*)	(9, 7) y (6, 3)
(*d*)	(—6, 2) y (—6, —3)	(*j*)	(2, 0) y (0, 6)
(*e*)	(4, 1) y (6, 1)	(*k*)	(—1, 0) y (0, —5)
(*f*)	(5, —3) y (6, 2)	(*l*)	(—5, 0) y (0, 3)

2. Dar las ecuaciones paramétricas de las rectas del ejercicio 1.
3. Dar las fórmulas (17) de las rectas L que pasan por $P_1 = (x_1, y_1)$ y ortogonales a $Q = (a, b)$ en cada uno de los casos del ejercicio 1 donde se toma P_1 como el primer punto y Q como el segundo.
4. Reemplazar cada ecuación del ejercicio 3 por una ecuación equivalente en la que (a, b) sea sustituida por un vector unitario $(u, v) = (a/r, b/r)$.
5. Hallar las coordenadas del punto medio de cada segmento rectilíneo $\overline{P_1P_2}$ en que P_1 es el primer punto dado en cada parte del ejercicio 1 y P_2 es el segundo.
6. Hallar las coordenadas de un punto P para P_1, P_2 como en el ejercicio 5 tales que $\overline{P_1P}/\overline{P_1P_2} = t$ donde (*a*) $t = 1/3$; (*b*) $t = 2/3$; (*c*) $t = 3/2$; (*d*) $t = -2/3$.
7. Poner $y = 0$ en la fórmula (19) y resolver para x con el fin de obtener la fórmula, usada en el capítulo VII, para la solución de una ecuación por el método de interpolación.

9. Secciones cónicas.

Una ecuación cuadrática

$$(22) \quad F(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$$

definida para números reales a, b, c, d, e, g, tales que a, b, c no son todos cero se dice que define una *sección cónica*. Si se sustituyen (x, y) por $x'u - y'v$ y $x'v + y'u$, respectivamente, como en la fórmula (5), se obtiene una nueva ecuación

$$(23) \quad \phi(x, y) \equiv \alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2 + \delta x' + \varepsilon y' + \zeta = 0,$$

en la que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ son números reales. Esta nueva ecuación es la de la misma curva con respecto al sistema de coordenadas (x', y'). Se probará que $u = \cos\theta$ y $v = \operatorname{sen}\theta$ pueden elegirse de manera que $\beta = 0$.

Los términos de segundo grado $F(x, y)$ completan una forma cuadrática

$$(24) \qquad Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

y se dice que $a + c$ es la *traza* de $Q(x, y)$ y $ac - b^2$ su *determinante*. Estos números determinan una ecuación

$$(25) \quad z^2 - (a + c)z + ac - b^2 \equiv (z - \alpha)(z - \gamma) = 0,$$

llamada *ecuación característica* de $Q(x, y)$. Las raíces α y γ de esta ecuación se llaman *raíces características* de $Q(x, y)$ y se ha visto ya que

$$(26) \qquad \alpha\gamma = ac - b^2, \qquad \alpha + \gamma = a + c.$$

El discriminante de la ecuación cuadrática (25) es

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$$

y es positivo. Luego α y γ son números reales y distintos. Ahora se demuestra el siguiente:

Teorema. *Sea* $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *donde* $b \neq 0$ *y sean* α, γ *las raíces características de* $Q(x, y)$. *Entonces la rotación de los ejes definida por*

$$(27) \qquad u = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (\alpha - a)^2}}, \qquad v = \frac{\alpha - a}{\sqrt{b^2 + (\alpha - a)^2}}$$

transforma a $Q(x, y)$ *en* $\alpha x'^2 + \gamma y'^2$.

La primera de las ecuaciones

$$(28) \qquad \begin{aligned} au + bv &= \alpha u \\ -av + bu &= -\gamma v \\ bu + cv &= \alpha v \\ -bv + cu &= \gamma u \end{aligned}$$

se satisface si la fórmula (27) es válida, y ésta puede realmente deducirse de la primera ecuación si se emplea la forma equivalente

$$(29) \qquad v = \frac{\alpha - a}{b} u, \qquad u^2 + v^2 = 1.$$

La segunda ecuación es equivalente, en vista de la fórmula (29), a $(a-\gamma)(\alpha - a)u = b^2 u$, que es verdadera puesto que, por la fórmula (26), se tiene

$$b^2 + (a-\alpha)(a-\gamma) = b^2 + a^2 - (a+c)a + (ac - b^2) = 0.$$

La tercera ecuación resulta cuando se emplea la fórmula (29) para escribir su fórmula equivalente $(\alpha - c)(\alpha - a)u = b^2 u$ y así $[\alpha^2 - (a-c)\alpha + (ac - b^2)]u = 0$. Efectivamente, α es una raíz de la ecuación de la fórmula (25).

Finalmente, la cuarta ecuación es una consecuencia de la tercera cuando se sustituye u por $(a - \alpha/b)v$ y así se tiene

$$[(c-\gamma)(a-\gamma) - b^2]v = [\gamma^2 - (a+c)\gamma + ac - b^2]v = 0.$$

Las ecuaciones primera y segunda de la fórmula (28) pueden multiplicarse respectivamente por u y $-v$ y sumarse para obtener $\alpha u^2 + \gamma v^2 = a$. De manera semejante pueden usarse las ecuaciones tercera y cuarta para obtener $\alpha v^2 + \gamma u^2 = c$. Se multiplica la primera ecuación por v, la segunda por u y se suman para obtener

$$(\alpha - \gamma)uv = b.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x'^2 + \gamma y'^2 &\equiv \alpha(xu + yv)^2 + \gamma(-xv + yu)^2 \\ &\equiv x^2(\alpha u^2 + \gamma v^2) + 2xy(\alpha - \gamma)uv + y^2(\alpha v^2 + \gamma u^2) \\ &\equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplos ilustrativos

I. Eliminar el término xy de la ecuación $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ mediante una rotación de ejes.

Solución

Aquí $a = 2$, $b = -2$, $c = 5$ de modo que $a + c = 7$; $ac - b^2 = 6$ y la ecuación característica es $z^2 - 7z + 6 = (z-6)(z-1)$. Se toma $\alpha = 1$, $\gamma = 6$ y la ecuación $(x'y')$ es

$$x'^2 + 6y'^2 = 3.$$

Además, $au + bv = \alpha u$ viene a ser $2u - 2v = u$, de modo que $u = 2v$ y

$$r(u, v) = r(2, 1), \qquad u = 2/\sqrt{5}, \qquad v = 1/\sqrt{5}.$$

Las ecuaciones de la rotación son

$$x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} \qquad y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}.$$

II. Eliminar el término xy de $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 5x + 10y + 3 = 0$ mediante una rotación de ejes.

Solución

Aquí $a = 9$, $b = 12$, $c = 16$, de modo que se resuelve

$$z^2 - 25z + (9 \cdot 16 - 144) = z^2 - 25z = 0.$$

Así $z = 0, 25$. Tómese $\alpha = 0$ y así resolver $9u + 12v = 0$, $3u + 4v = 0$, $u = 4/5$, $v = -3/5$. Las ecuaciones para la rotación son $5x = 4x' + 3y'$, $5y = -3x' + 4y'$, y $-5x + 10y = -4x' - 3y' - 6x' + 8y' = -10x' + 5y'$.

La rotación de ejes sustituye la ecuación por

$$25y'^2 - 10x' + 5y' + 3 = 0.$$

EJERCICIOS

Eliminar el término xy de cada una de las ecuaciones siguientes mediante una rotación de ejes:

(a) $4xy - 16 = 0$

Resp.: $x'^2 - y'^2 = 8$; $u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*b*) $8x^2 + 4xy - 24y^2 = 5$

(*c*) $x^2 + 2xy + y^2 - 3 = 0$

Resp.: $2x'^2 = 3,\ u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*d*) $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 17$

(*e*) $x^2 - 10xy + y^2 = 5$

Resp.: $12x'^2 - 10y'^2 = 5,\ u = -5/\sqrt{146},\ v = 11/\sqrt{146}$.

(*f*) $25x^2 + 120xy + 144y^2 = 1$

(*g*) $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 12$

Resp.: $3x'^2 - y'^2 = 6,\ u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*h*) $5x^2 - 20xy + 20y^2 = 4$

(*i*) $x^2 + 12xy + y^2 = 8$

Resp.: $7x'^2 - 5y'^2 = 8,\ u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*j*) $25x^2 + 30xy + 9y^2 + 20x + 6y + 1 = 0$

(*k*) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x + 3y - 9 = 0$

Resp.: $5x'^2 - 3\sqrt{5}y' = 9,\ u = -1/\sqrt{5},\ v = 2/\sqrt{5}$.

(*l*) $27x^2 - 36xy + 12y^2 - 20x + 9y = 16$

(*m*) $x^2 + xy + y^2 + 3y - 4 = 0$

Resp.: $3x'^2 - y'^2 - 3\sqrt{2}(x' - y') = 8,\ u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*n*) $2x^2 + 12xy + 18y^2 = 0$

(*o*) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x - 10y - 15 = 0$

Resp.: $2x'^2 + 8y'^2 + 5\sqrt{2}x' = 15,\ u = v = 1/\sqrt{2}$.

(*p*) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$

(*q*) $4xy - 3y^2 + 6x + 4y = 5$

(*r*) $11x^2 - 24xy + 4y^2 - 6x - 8y = 20$

(*s*) $4x^2 + 12xy + 20y^2 + 10x - 8y = 6$

(*t*) $5x^2 + 6xy - 3y^2 + 6x + 2y = 1$

(*u*) $5x^2 - 12xy + 10y^2 + x - y = 4$

(*v*) $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 2x + 3y = 5$

(*w*) $7x^2 + 8xy - 8y^2 + 9x - 6y = 11$

(*x*) $4x^2 + 24xy - 3y^2 + 8x + 8y = 10$

(*y*) $7x^2 + 6xy - y^2 - 76x - 60y - 100 = 0$

(*z*) $85x^2 + 96xy + 45y^2 + 1\,064x + 744y - 1\,308 = 0$

CAPITULO IX

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS LINEALES

1. Sistemas de ecuaciones. Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una función compleja de n variables complejas $x_1, \ldots, x_n$. Entonces se ha visto que a cada sucesión de números complejos $c_1, \ldots, c_n$ le corresponde un valor de la función, designado con $f(c_1, \ldots, c_n)$ y llamado el *valor* de $f(x_1, \ldots, x_n)$ en $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$. Se dice que $(c_1, \ldots, c_n)$ es una *solución* de la ecuación condicional $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si el valor $f(c_1, \ldots, c_n)$ es cero.

Un conjunto de ecuaciones condicionales

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\
&f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

definidas por m funciones en n variables se llama un *sistema de ecuaciones.* Un sistema de ecuaciones (1) pregunta: ¿Cuáles son las sucesiones de números $(c_1, \ldots, c_n)$ que son *simultáneamente* solución de todas las m ecuaciones?

Si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de la fórmula (1) son funciones definidas por polinomios lineales en $x_1, \ldots, x_n$, a la fórmula (1) se le llama un *sistema lineal.* La teoría de los *determinantes* da un procedimiento para la solución de sistemas lineales y se estudiará en este capítulo. La teoría de las *matrices,* de la cual la teoría de los determinantes es una parte, también tiene su origen en el estudio de sistemas lineales y se tratarán también algunos puntos de esta teoría.

Se empezará con una generalización del concepto de vector. Un *vector de dimensión n* es una sucesión $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ de n números llamados los *elementos de* α. Un vector puede interpretarse como una sucesión de coordenadas de un punto en un espacio geométrico de dimensión n, o bien como una sucesión de coeficientes de una ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = k,$$

o también como una sucesión de valores $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ de n variables. El presente estudio algebraico no usará estas interpretaciones sino que sólo tratará los vectores simplemente como sucesiones.

La *suma* $\alpha + \beta$ de dos vectores $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ es el vector

$$(2) \qquad \alpha + \beta = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

obtenido al sumar los elementos correspondientes. El *vector cero* es el vector $(0, 0, \ldots, 0)$ y se designará simplemente con el símbolo 0. Este tiene la propiedad

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

para todo vector α. El *negativo* $-\alpha$ de un vector $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ es el vector que tiene la propiedad de que $\alpha + (-\alpha) = 0$. Así $-\alpha = (-a_1, \ldots, -a_n)$. La *diferencia* $\alpha - \beta$ se define como $\alpha + (-\beta)$ y es $(a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$. Se puede demostrar que la suma de vectores es conmutativa y asociativa. Se deja la extensión del sentido de esta afirmación al lector, así como la comprobación.

El producto $d\alpha$ de un *vector* α por un número llamado un *escalar* d es por definición

$$d\alpha = (da_1, \ldots, da_n).$$

A una suma $d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \ldots + d_m\alpha_m$ de productos $d_i\alpha_i$ de escalares d_i por vectores α_i se le llama una *combinación lineal* de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

EJERCICIOS ORALES

1. Sean $\alpha = (3, -5, 4, 2)$, $\beta = (-6, 2, -3, -1)$. Calcúlense:

(a) $\alpha + \beta$	*(c)* $3\alpha + 2\beta$	*(e)* $4\alpha + \beta$
(b) $\alpha - \beta$	*(d)* $2\alpha - 3\beta$	*(f)* $\alpha - 4\beta$

2. Sean $\alpha = (2, -3, 1)$, $\beta = (1, 2, -2)$, $\gamma = (3, -1, 4)$. Calcúlense las combinaciones lineales:

(a) $\alpha + \beta + \gamma$	*(c)* $3\alpha - 2\beta + \gamma$	*(e)* $2(\alpha + \beta) - 3\gamma$
(b) $2\alpha - \beta - \gamma$	*(d)* $2\alpha - 3\beta + \gamma$	*(f)* $3(2\alpha + \beta) - 4\gamma$

2. Matrices rectangulares. Una *matriz es una colección de números colocados en forma rectangular*, como en el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Aquí los números son los coeficientes de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 del siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales en cinco variables:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 6x_5 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + 6x_5 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 7. \end{cases}$$

Esta se dice que es una matriz de 4 por 5.

Las sucesiones horizontales de números de una matriz son vectores llamados *renglones*. Las sucesiones verticales son vectores llamados *columnas*. En el ejemplo mencionado, el tercer renglón de A es $(2\ 0\ 1\ 1\ 6)$ y

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

es la cuarta columna.

Se acostumbra llamar a los renglones de A los *vectores-renglón* y a las columnas, los *vectores-columna*. Más adelante se sumarán renglones (columnas) de A con otros renglones (columnas) y se multiplicarán renglones (columnas) por números. Obsérvese que no es necesario separar con comas los elementos de una sucesión formada por una columna. También se acostumbra omitir las comas en los renglones de una matriz y por esto desde ahora se omitirán las comas en todos los vectores.

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una *matriz* de m por n. Los vectores-renglón son matrices de n por 1, y un vector formado con una columna es una matriz de m por 1.

Los números que hay en una matriz se llaman los *elementos* de la matriz. Si todos los elementos de una matriz A son cero, se dirá que ésta es la *matriz cero* y se escribirá $A = 0$ *cualquiera que sea el número de renglones y columnas de* A. Se dirá también que dos matrices A y B son iguales y se escribirá $A = B$ si las dos son matrices del mismo tamaño m por n y los elementos colocados en los lugares correspondientes son iguales.

La posición de un elemento en una matriz es por lo menos tan importante como su valor. La posición de un elemento se describe indicando el renglón y la columna en que se encuentra. Por ejemplo, en la matriz antes mencionada el número 3 está en el cuarto renglón y en la segunda columna. Es conveniente, por tanto, introducir una notación para el elemento general de cualquier matriz. Este es el símbolo

$$a_{ij}.$$

El primer *índice*, i, indica el *renglón;* su valor es el número del renglón A en el cual a_{ij} se encuentra. El segundo *índice*, j, indica la *columna* en donde se encuentra a_{ij}. Cuando A es una matriz m por n, los valores de i varían de 1 a m y los de j, de 1 a n.

En la matriz de arriba, $a_{42} = 3$, $a_{11} = a_{44} = -3$,

$$a_{12} = a_{33} = a_{34} = a_{43} = 1,$$

$a_{14} = -1$, $a_{13} = -5$, $a_{15} = 6$, etc. El tercer renglón de la matriz consta de todos los elementos cuyo primer índice es tres, que son, en este caso,

$$a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34},\ a_{35}.$$

El lector puede mencionar sus valores, así como, por ejemplo, la notación y los valores de los elementos de la cuarta columna.

Se usará ahora la notación

$$(3) \qquad A \doteq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

para una matriz arbitraria A de m por n. Se usará también la notación

$$(4) \qquad A = (a_{ij}) \ (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

EJERCICIOS ORALES

1. La matriz mencionada al principio de este artículo es de 4 por 5. Dígase cómo son las siguientes matrices:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $(1 \quad 3 \quad -5 \quad 6 \quad 2)$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

2. Dígase cuánto valen los elementos a_{12}, a_{34}, a_{42}, a_{13}, a_{31} en las matrices del ejercicio oral 1, *siempre que exista la columna.*

3. ¿Cuáles son los primeros renglones de las matrices del ejercicio oral 1?

4. ¿Cuáles son los terceros renglones y las segundas columnas de aquellas matrices del mismo ejercicio (siempre que existan)?

5. ¿Qué tipo de matriz es un renglón de una matriz de $m \times n$? ¿Y una columna? ¿Y un elemento?

3. Transformaciones elementales. Se tratará ahora de varios procedimientos para alterar una matriz A, llamados *transformaciones elementales* en A. Estos tienen su origen en el estudio de los sistemas lineales de ecuaciones cuando éstas se intercambian, se suman o se multiplican por un número.

Hay tres tipos de transformaciones elementales en los renglones de una matriz y tres tipos correspondientes para las columnas. El primer tipo es el *intercambio de dos renglones* o el *intercambio de dos columnas*. Con una sucesión de tales transformaciones se puede lograr cualquier permutación de los renglones y de las columnas de una matriz.

El segundo tipo es el de *sumar a un renglón (columna) un múltiplo numérico arbitrario de otro renglón (columna)*. El último tipo es la *multiplicación de un renglón (columna) por cualquier número distinto de cero.* Obsérvese que todas las transformaciones son reversibles.

El resultado de aplicar un número finito de transformaciones elementales a una matriz A de m por n es otra matriz B de m por n. Entonces se dirá que A y B son matrices *equivalentes* y se escribirá $A \cong B$.

Obsérvese que $A \cong B$ no quiere decir que sean iguales. Significa simplemente que están relacionadas en la forma que se ha descrito anteriormente y no debe tratarse de leer otra cosa en esta definición.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar una matriz B obtenida de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

agregando al primer renglón el segundo más el doble del tercero.

Solución

El nuevo primer renglón será

$$(5 \;\; -4 \;\; 4 \;\; 2) + (-2 \;\; 0. \;\; -8 \;\; 5) + (-2 \;\; 4 \;\; 4 \;\; -6) = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)$$

Así,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

II. Restando a ciertas columnas múltiplos de otras columnas de A obténgase una matriz $B \cong A$ tal que en el primer renglón figure un solo elemento distinto de cero.

Solución

Sean c_1, c_2, c_3, c_4 las columnas de A. Se forma $c_1 - 2c_4$, $c_2 + 2c_4$, $c_3 - 2c_4$ y después $c_4 - 2(c_1 - 2c_4)$ para obtener

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -12 & 10 & -18 & 5 \\ 5 & -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 10. & -18 & 29 \\ 5 & -4 & 8 & -13 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Sean r_1, r_2, r_3 los tres renglones de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dígase la matriz B obtenida al

(a) Sumar $2r_2 + r_3$ a r_1
(b) Sumar $r_1 + r_2$ a r_3
(c) Sumar $r_3 - 2r_1$ a r_2
(d) Restar $3r_1 + r_2$ de r_3
(e) Restar $r_3 - 2r_1$ de r_2

2. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 las columnas de la matriz A de arriba. Dígase la matriz B obtenida al

(a) Sumar $c_2 + c_3 + 2c_4$ a c_1
(b) Sumar $c_1 + c_3 + c_4$ a c_2
(c) Sumar $2c_1 + c_2 + c_4$ a c_3
(d) Restar $2c_1$ de c_3
(e) Restar $2c_1 + c_3$ de c_4
(f) Restar $c_4 - 3c_1$ de c_2

3. Simplificar el primer renglón de cada una de las matrices siguientes por el procedimiento usado en el ejemplo ilustrativo II.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4. Simplificar el segundo renglón de cada una de las matrices del ejercicio 3 por un procedimiento análogo.

5. Simplificar la primera columna de cada una de las matrices del ejercicio 3 usando transformaciones de renglones.

6. Simplificar las segundas columnas usando transformaciones de renglones.

4. Matrices especiales. Los elementos a_{ii} de una matriz $A = (a_{ij})$ se llaman los elementos *diagonales* de A, y los elementos a_{ij} con $i \neq j$, elementos *no diagonales.* La colección $a_{11}, a_{22}, \ldots,$ de elementos diagonales de A se llama la ***diagonal***

de A. Entonces se dice que los elementos a_{ij} con $j > i$ están *arriba de la diagonal* de A y los elementos a_{ij} con $j < i$ están *debajo de la diagonal*. Se dice que A tiene *forma triangular* si todos los elementos de debajo de la diagonal de A, o todos los elementos de arriba de la misma, son ceros. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tienen forma triangular.

Se dice que una matriz A es *cuadrada* si tiene el mismo número de renglones que de columnas, es decir, es una matriz A de n por n. Se habla de estas matrices como de *matrices cuadradas de orden* n.

Una matriz cuadrada de forma triangular se llama *matriz triangular*. Si los elementos no diagonales de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ son todos nulos, se dice que A es una matriz *diagonal* y se escribe $A = diag\ \{d_1, \ldots, d_n\}$, en donde $d_i = a_{ii}$ es el elemento diagonal i de A. Una matriz *escalar* es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos *iguales*. Por ejemplo, la primera de las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

es una matriz diagonal y no escalar, mientras que la segunda es escalar.

Una matriz escalar cuyos elementos diagonales son todos 1 se llama matriz *idéntica*. Se acostumbra designar con I toda matriz *idéntica* cualquiera que sea su orden.

5. Submatrices. Si en una matriz rectangular A se omiten ciertos renglones y ciertas columnas, los elementos restantes forman también una matriz llamada *submatriz* de A. Por ejemplo, la omisión del primer renglón y de las columnas segunda y quinta de la matriz de 4 por 5 del artículo 2 es la submatriz de 3 por 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es de particular interés el resultado de suprimir justamente un renglón y una columna de una matriz cuadrada A de orden n. Se obtiene una submatriz cuadrada de orden $n-1$. Cada elemento a_{ij} de A determina el renglón y la columna de A donde él se encuentra y se denota con A_{ij} a la submatriz obtenida tachando dicho renglón y dicha columna. Por ejemplo, en la matriz de 3 por 3 anteriormente mencionada se tiene

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS ORALES

1. Dígase cuáles son las matrices A_{45}, A_{33}, A_{22} en la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. ¿En qué renglón y columna de A_{11} figura el elemento a_{33} de A?
3. ¿En qué renglones y columnas de A_{23} figuran los elementos a_{11} y a_{14} de A?
4. ¿En qué renglón y columna de A_{13} figura a_{31}?

6. Determinantes. Se asociará a cada matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ un *número* que se llamará el *determinante* de A y se denotará con $|A|$. Se escribirá también $|A| = |a_{ij}|$ y

$$(5) \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

y a este símbolo se le llama también un *determinante de orden n*. Las matrices que no son cuadradas no tienen determinante.

El determinante de una matriz $A = (a)$ de 1 por 1 se define como el número a. Se define también

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Así, pues, se han definido los determinantes de orden tres en términos de determinantes de orden dos.

Ahora se procede por inducción. Supóngase que se han definido ya los determinantes de orden $(n-1)$. Entonces toda matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, tiene elementos a_{ij} que corresponden a submatrices cuadradas A_{ij} de orden $(n-1)$. Al determinante A_{ij} se le llama el *menor* de a_{ij} y al número

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

el *cofactor* de a_{ij}. Selecciónese cualquier renglón de A. Multiplíquense los elementos de éste por sus cofactores y súmense los resultados. Se obtendrá el número

$$a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in}.$$

Análogamente, si se elige una columna, se obtiene una suma

$$a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \ldots + a_{nj}\delta_{nj}.$$

Se probará en el siguiente artículo que todos estos números son iguales. *Este valor común se llama el determinante de* A.

Se ha dado una expresión de $|A|$ para cada renglón y otra para cada columna de A. Cada una de estas expresiones se llama un *desarrollo* de $|A|$ con respecto al correspondiente renglón o columna. Todo desarrollo es una suma de n términos. Cada término de un desarrollo es el producto de un elemento de un renglón fijo por su cofactor. El signo $(-1)^{i+j}$ que se antepone a cada menor $|A_{ij}|$ para obtener el cofactor δ_{ij} de a_{ij}, es más si la suma de los índices del renglón y la columna determinados por a_{ij} es par, y es menos si dicha suma es impar. Así, pues, los signos van alternando y pueden presentarse en forma de un tablero de ajedrez. Para $n = 2$, 3, 4 éstos son:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Los resultados siguientes son simples consecuencias de las definiciones. No se darán las demostraciones formales.

Teorema 1. *Si todos los elementos de un renglón o de una matriz* A *son cero, entonces* $|A| = 0$.

Teorema 2. *El determinante de una matriz triangular* A *es igual al producto de los elementos diagonales de* A. *El determinante de la matriz idéntica de orden* n *es* 1.

Ejemplos ilustrativos

I. ¿Cuáles son los menores y los cofactores de los elementos de la segunda columna de

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}?$$

Solución

Usando la técnica de tachar la segunda columna de A para facilitar la visualización, se puede escribir la submatriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces los menores se obtienen omitiendo sucesivamente los renglones en turno y son

$$d_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ya que $1 + 2$ es impar, los cofactores son $-d_1$, d_2, $-d_3$, d_4.

I. Escríbase el desarrollo del determinante de arriba con respecto al tercer renglón.

Solución

El renglón es $(-1 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$. Si se tacha éste, se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ya que $1 + 3$ es par, el desarrollo es:

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

III. Complétese el desarrollo del determinante de arriba con respecto a su tercer renglón.

Solución

El primer determinante se desarrolla, digamos, con respecto al segundo renglón. El resultado es $(-2)(6 + 24) - (12 - 3) = -69$. Desarrollando en forma análoga el segundo se tiene

$$-4(6 + 24) - (-6 + 15) = -120 - 9 = -129.$$

Desarrollando el tercer determinante con respecto al primer renglón se obtiene

$$(-1)(4 - 1) - 2(8 + 5) - 4(4 + 10) = -3 - 26 - 56 = -85.$$

Entonces el último determinante es

$$(-4)(12 - 3) + 2(-6 + 15) = -36 + 18 = -18.$$

Por consiguiente $|A| = 69 + 129 - 170 + 54 = 82$.

EJERCICIOS

1. Escríbase el desarrollo de los siguientes determinantes con respecto al primer renglón:

(*a*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -2 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (*d*) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(*b*) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (*e*) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(*c*) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (*f*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. Escríbanse los términos en el desarrollo de los determinantes del ejercicio 1 con respecto a la tercera columna.

3. Calcúlense los determinantes (*c*), (*e*) y (*f*) del ejercicio 1 usando renglones o columnas de tal manera que se simplifiquen lo más posible los cálculos.

4. Calcúlense los determinantes siguientes:

(*a*) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ *Resp.*: -45.

(*c*) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *Resp.*: -3.

(*b*) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(*d*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

(*e*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ *Resp.*: 0.

(*f*) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

(*g*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ *Resp.*: 21.

(*h*) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -4 & -10 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

(*i*) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *Resp.*: 1.

(*j*) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

(*k*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ *Resp.*: 3.

(*l*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(*m*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ *Resp.*: —2.

(*n*) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

(*o*) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ *Resp.*: 154.

7. Demostración de la igualdad de todos los desarrollos (CURSO COMPLETO). Se desea ahora considerar determinantes de orden n para $n > 1$ y demostrar que al desarrollar cualquiera de ellos con respecto a un renglón se obtiene el mismo valor que al desarrollarlo con respecto a cualquier otro renglón. Esto es cierto para el menor valor de $n = 2$, pues los cálculos directos lo demuestran. Por lo tanto, se tiene el primer paso de una demostración inductiva. Como paso siguiente se supone que todos los desarrollos de un determinante arbitrario de orden $(n-1)$ dan el mismo número.

Selecciónense dos renglones de una matriz A de orden n y sean i, k sus índices con $i < k$. Desarrollando $|A|$ con respecto al renglón i se obtiene la suma

$$(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|a_{in}|.$$

El renglón k de A es el renglón $(k-1)$ de cada A_{ij} ya que cada submatriz se obtiene al omitir un renglón de A que está más *arriba* del renglón k. Desarróllese cada $|A_{ij}|$ con respecto a su renglón $k-1$. Las hipótesis hechas aseguran que los resultados de estos últimos desarrollos serán los valores correctos de $|A_{ij}|$. Los elementos en el renglón $(k-1)$ de A_{ij} son los elementos a_{kh} de A con $h \neq j$. Sustitúyanse estos desarrollos en la suma original. Entonces se obtiene una suma de $n(n-1)$ productos con ciertos signos, de la forma $a_{ij}a_{kh}|G|$, en donde la matriz G que figura en cada uno de los términos es el resultado de tachar en A los renglones i, k y las columnas j, h.

Cada uno de estos términos $a_{ij}a_{kh}|G|$ puede asociarse exactamente con otro término de tal forma que los dos tengan la *misma* matriz G. Este será el término $a_{ih}a_{kj}|G|$ y puede seleccionarse siempre la *notación* de tal manera que $j < h$. Si se hace esto, se ve que el elemento a_{kh} está en el renglón $(k-1)$ y la columna $h-1$ de $|A_{ij}|$, y que el signo correspondiente a $a_{ij}a_{kh}|G|$ es $(-1)^s = (-1)^t$, en donde

$$s = i + j + (k-1) + (h-1)$$

y $t = i + j + k + h$. El elemento a_{kj} está en el renglón $k-1$ y en la columna j de $|A_{ih}|$ y el signo correspondiente a $a_{ih}a_{kj}|G|$ es $(-1)^u$ con $u = i + h + (k-1) + j = t-1$. Se sigue entonces que la suma de los dos elementos mencionados es

$$(6) \qquad (-1)^{i+j+h+k}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ih} \\ a_{kj} & a_{kh} \end{vmatrix} \cdot |G|.$$

Se ha probado que $|A|$ puede desarrollarse como una suma de $n(n-1)/2$ términos. Cada uno de ellos es un producto, uno de cuyos factores es un determinante de orden dos obtenido de dos renglones fijos y de todas las selecciones posibles de un par de columnas. Entonces hay evidentemente $C_{n,2} = n(n-1)/2$ términos posibles. El segundo factor es el determinante $|G|$ de orden $(n-2)$ obtenido de A al tachar los dos renglones y las dos columnas correspondientes y con un signo $(-1)^t$ en donde t es la suma de los dos índices de los renglones y de los dos índices de las columnas.

Desarróllese ahora el determinante $|A|$ con respecto al renglón k. Después desarróllese también cada $|A_{kh}|$ de acuerdo con el renglón i. Este es el i-ésimo renglón de $|A|$ y se obtienen entonces las mismas $C_{n,2}$ parejas de términos $a_{kh}a_{ij}|G|$, $a_{kj}a_{ih}|G|$. El elemento a_{ij} está en el renglón i y en la columna j de A_{kh} y, por lo tanto, se le asocia el signo $(-1)^t$ con $t = k + h + i + j$ como antes. El elemento a_{ih} está en el i-ésimo renglón y en la columna $(h-1)$ de A_{kj} y se le asocia el signo $(-1)^u$ en donde $u = k + j + i + h - 1 = t - 1$. Por lo tanto, las parejas de elementos son las mismas y entonces este segundo desarrollo tiene los mismos términos y signos de (6) y, por consiguiente, valen lo mismo. Esto completa la inducción y demuestra que *todos los desarrollos con respecto a los renglones tienen el mismo valor.*

Para probar que *todos los desarrollos con respecto a las columnas son iguales a los desarrollos con respecto a los renglones,* obsérvese que, en primer lugar, los argumentos anteriores pueden traducirse simétricamente para probar que dos desarrollos con respecto a dos columnas arbitrarias son iguales. Se omitirán estos detalles. Entonces la demostración quedará completa si se demuestra que el desarrollo de $|A|$ con respecto al primer renglón es igual al desarrollo de $|A|$ con respecto a la primera columna. Estos dos desarrollos tienen el término $a_{11}|A_{11}|$ en común. Los otros términos del desarrollo con respecto al primer renglón son $(-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}|$ para $j = 2, \ldots, n$, y los del desarrollo con respecto a la primera columna son $(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|$ para $i = 2, \ldots, n$. Desarrollando $|a_{1j}|$ con respecto a la primera columna se obtiene una suma de términos $(-1)^i a_{i1}|G|$ puesto que a_{i1} está en el renglón $(i-1)$ de A_{1j}. Entonces el término correspondiente en el desarrollo de A será $(-1)^{i+1+j}a_{i1}a_{1j}|G|$. Desarrollando ahora $|A_{i1}|$ con respecto al primer renglón se obtienen los términos $(-1)^j a_{1j}|G|$. En ambos casos G se obtiene tachando el primero y el i-ésimo renglones y la primera y la j-ésima columnas de A, y es exactamente la misma matriz en ambos desarrollos. Además los términos correspondientes

$$(-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j}|G|$$

son iguales a los anteriores. Así queda expuesto cómo desarrollar ciertos determinantes de orden $(n-1)$ en el desarrollo de $|A|$ con respecto a su primer renglón, lo mismo que con respecto a su primera columna. También se ha visto que los resultados pueden entonces parearse de modo que los términos correspondientes sean idénticos. Está claro que los desarrollos dan el mismo valor. Esto completa la demostración de que los desarrollos de todos los renglones y todas las columnas de un determinante son números iguales.

8. Propiedades de los determinantes. La matriz de n por m cuya i-ésima columna es el i-ésimo renglón de una matriz A de $m \times n$ se llama la *transpuesta* de A y se designa con A' (léase "A prima" o "A transpuesta"). Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

En el artículo siguiente se probará el siguiente

Teorema 3. *El determinante de la transpuesta de una matriz cuadrada* A *es igual al determinante de* A.

Igualmente se demostrarán las siguientes propiedades:

Teorema 4. *Sea* B *la matriz obtenida de una matriz cuadrada* A *multiplicando uno de los renglones o columnas de* A *por un número* c. *Entonces* $|\mathrm{B}| = \mathrm{c}|\mathrm{A}|$.

Teorema 5. *Sea* B *la matriz obtenida de una matriz cuadrada* A *al intercambiar dos renglones o dos columnas de* A. *Entonces* $|\mathrm{B}| = -|\mathrm{A}|$.

Corolario. *Si dos renglones o dos columnas de una matriz cuadrada* A *tienen elementos proporcionales, entonces* $|\mathrm{A}| = 0$.

Teorema 6. *Sea* B *la matriz obtenida de una matriz cuadrada* A *sumando a un renglón (columna) de* A *un múltiplo numérico de otro renglón (columna) de* A. *Entonces* $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}|$.

El corolario de los teoremas 4 y 5 anteriores se usa en la demostración del teorema 6. Por el teorema 4 se tiene $|A| = d|D|$ con dos renglones o columnas en D iguales. Con el intercambio de estos dos renglones o columnas de D se obtiene una matriz E tal que $|E| = -|D|$, debido al teorema 5. Pero E y D son matrices iguales, de donde $|D| = -D$, $2|D| = 0$, $|D| = 0$, y finalmente $|A| = 0$.

En el ejemplo siguiente se usarán estos teoremas sobre determinantes para indicar un procedimiento que puede simplificar el cálculo de determinantes.

Ejemplo ilustrativo

Calcúlese $|A|$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 12 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6(14 + 15) = 174.$$

EJERCICIOS

Usar el método indicado para calcular los determinantes del ejercicio 4 del artículo 6.

9. Demostración de los teoremas sobre determinantes (CURSO COMPLETO). Si $n = 1$, la transpuesta de A es A' y $|A| = |A'|$. Supóngase demostrado el teorema 3 para todas las matrices cuadradas de orden $(n-1)$ y sea A una matriz cuadrada de orden n arbitrario. Cada elemento a_{1j} del primer renglón de A determina una submatriz A_{1j} de A. Entonces a_{1j} está en el renglón j y en la primera columna de A' y su submatriz correspondiente es A_{1j}'. De la hipótesis se sigue que $|A_{1j}'| = |A_{1j}|$, y el cofactor del elemento a_{1j} de A' es igual a su cofactor en A. Se sigue que el desarrollo de $|A'|$ con respecto a la primera columna es igual al desarrollo de $|A|$ con respecto al primer renglón. Esto completa la demostración inductiva del teorema 3.

Si se demuestra un teorema sobre determinantes en el cual figuren los renglones de las matrices cuadradas, se puede aplicar a los renglones de una matriz A'. Entonces estos renglones serán las columnas de A y, según el teorema 3, $|A'| = |A|$. De aquí se obtendrá el mismo teorema para columnas. Así, pues, quedan sólo por demostrar los teoremas 4, 5 y 6 para renglones.

Para probar el teorema 4, supóngase que el i-ésimo renglón de B es $ca_{i1}, ca_{i2}, \ldots, ca_{in}$. Entonces se desarrolla $|A|$ con respecto al i-ésimo renglón y se obtiene $|A| = a_{i1}\delta_{i1} + \ldots + a_{in}\delta_{in}$. El cofactor de ca_{ij} en B es también δ_{ij} y se tiene $B = (ca_{i1})\delta_{i1} + \ldots + (ca_{in})\delta_{in} = c|A|$, con lo cual queda demostrado el teorema 4.

El teorema 5 tiene sentido solamente para matrices A de orden $n > 1$. Sea B el resultado de intercambiar los renglones i y k de A. Usando el desarrollo de $|A|$ dado en la fórmula (6) se ve que el desarrollo correspondiente para $|B|$ consta de la suma de $C_{n,2}$ términos

$$(7) \qquad (-1)^t \begin{vmatrix} a_{kj} & a_{kh} \\ a_{ij} & a_{ih} \end{vmatrix} \cdot |G| = (-1)^t (a_{kj}a_{ih} - a_{ij}a_{kh})|G|.$$

Estos son los negativos de los términos de (6) y, por consiguiente, $|B| = -|A|$.

Finalmente, sea B la matriz obtenida de A al reemplazar el renglón i de A por él mismo más c veces el renglón k. Se desarrollan $|A|$ y $|B|$ con respecto a sus renglones i:

$$|A| = a_{i1}\delta_{i1} + \ldots + a_{in}\delta_{in}$$

y

$$|B| = (a_{i1} + ca_{k1})\delta_{i1} + \ldots + (a_{in} + ca_{kn})\delta_{in}$$

Entonces

$$|B| = |A| + c(a_{k1}\delta_{i1} + \ldots + a_{kn}\delta_{in}) = |A| + c|N|$$

en donde N es la matriz obtenida de A sustituyendo el i-ésimo renglón de A por su k-ésimo renglón. Es decir, N tiene dos renglones iguales y, por lo tanto, $|N| = 0$, y $|B| = |A|$.

10. El rango de una matriz. Sean t un entero y A una matriz de m por n. Entonces los elementos de A que figuran en t renglones y t columnas de A forman una submatriz N de orden t de A, cuyo determinante se llama un *menor de orden* t de A. Los elementos de A son sus menores de orden uno y los posibles valores de t son desde 1 hasta el mínimo de m y n.

El *rango* r de una matriz A es el *entero máximo* para el cual existe un menor de A de orden r y *diferente de cero.* Se puede calcular el rango de A calculando los valores de todos sus menores, pero es mejor calcularlo usando el teorema siguiente:

Teorema 7. *Las transformaciones elementales no alteran el rango de una matriz.*

Aquí no se dará la demostración de este teorema. Puede utilizarse para calcular el rango de A en la forma siguiente. Usando transformaciones elementales de renglones o columnas se lleva la matriz A a una matriz triangular B tal que $b_{ij} = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ siempre que $b_{ii} = 0$. Entonces *el número* r *de elementos diagonales* $b_{11}, \ldots, b_{rr}$ *distintos de cero* *de* B *es el rango de* A. En efecto, como sólo hay r renglones no nulos, todo menor de orden $r+k$ de B es cero. Además, B tiene una matriz triangular (cuadrada) T de orden r tal que $|T| = b_{11} \ldots b_{rr} \neq 0$.

Ejemplos ilustrativos

I. Calcúlese el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 & 2 & -8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resp.: $r = 2$.

II. Calcúlese el rango de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ -8 & 11 & 4 & 8 & -11 & 2 \\ -2 & 2 & 10 & 17 & -11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución

$$A \cong \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -12 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 12 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -22 & 12 \\ 0 & 0 & -10 & -16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Intercambiando las columnas 3 y 6 y los renglones 3 y 4 se obtiene

$$A \cong \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 26 & -22 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 26 & -22 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \textit{Resp.: } r = 4.$$

EJERCICIOS

Calcúlense los rangos de las matrices siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 23 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 13 & 10 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & -11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -13 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(l) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(n) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & -15 & -1 \end{bmatrix}$

(o) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

11. Las matrices de un sistema lineal. Una ecuación lineal en las variables $x_1, \ldots, x_n$ puede escribirse, después de agrupar los términos necesarios, en la forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = k.$$

El primer miembro de esta ecuación es entonces una forma lineal en $x_1, \ldots, x_n$, el segundo miembro es una constante k, y los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ son números. Se dice que una variable x_i *aparece explícitamente* en la ecuación si su coeficiente a_i es distinto de cero.

Un sistema lineal es un conjunto de varias ecuaciones lineales con diversas variables. Una notación general para un sistema de esta clase requiere una notación tal como $x_1, \ldots, x_n$ para las variables así como otra para los coeficientes. La última debe indicar lo mismo la ecuación en que va el coeficiente que la variable de la cual es coeficiente. Se usará el símbolo a_{ij} para indicar el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, \ldots, x_n$ tiene, pues, la forma

$$
(8) \qquad \begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = k_m
\end{array}
$$

en la cual los símbolos a_{ij} y k_i representan simplemente números complejos. Los números a_{ij} determinan una matriz $A = (a_{ij})$ en la cual a_{ij} es el elemento que ocupa el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. Se dice que A es la *matriz de coeficientes* del sistema (8). Si se adjunta a A una *columna* formada por las constantes $k_1, \ldots, k_n$, se obtiene una matriz de m por $n + 1$:

$$
A^* = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & k_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & k_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & k_n
\end{bmatrix},
$$

que se llama la matriz *aumentada* de los coeficientes de la fórmula (8).

Un sistema lineal se llama *homogéneo* o *no homogéneo* según que los números en su columna de constantes sean todos cero o no. Un sistema homogéneo tiene siempre por solución a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Esta se llamará la *solución trivial* del sistema homogéneo.

Se convendrá en que si el número n de variables no es mayor de cuatro, en lugar de usar x_1, x_2, x_3, x_4 se usará x, y, z, t en el orden indicado. Esto se hace necesario para que al preguntar por la matriz de un sistema, como en x, y o bien x, y, z, se tenga una respuesta única.

EJERCICIOS ORALES

1. **¿Cuál es la matriz de coeficientes de cada uno de los sistemas siguientes?**

(a) $3x - 2y + 4z - w = 3$
$x + 2y - z + w = 1$
$-2x + y + z - 2w = 4$
$7x - 2y + 3z - 8w = -6$

(b) $x + y - z - w = 2 + x$
$2x - y + 3z + w = 1 - y$
$-x + 2y + z - w = 0$

(c) $3x - 4y + z - w = 0$
$4x - 2y - z = 5w - 2y$
$x = 5y + z + 6w$
$y = z - w - x$

(d) $9x - 3y = 2z + 1$
$5 - 6x = 7y - 2$
$x - 1 = 2(y - 1) + 3(z - 2)$

(e) $3x - 2 + 2(y + 1) = 0$
$x - 2y + 3(z + 1) = 3$
$2(x + 1) - 5(y - 2) + 6(z - 1) = 6$

(f) $2 + x = y + z + 2x$
$3 - x = 2y - z - 3x$
$5y - 3x = -y + 2z + w$

(g) $2(x + 1) - 3(y - 1) = 5(z + 1)$
$3x - 2y = 2(x + z)$
$x - 2z = y$

(h) $2x + 3(z + 1) = 6(y + \frac{1}{2})$
$3(x - 1) + 2(y + 1) = z - 1$
$4(x + 1) + y - 2 = 2$

2. ¿Cuál es la matriz aumentada de cada uno de los sistemas del ejercicio oral 1?

3. ¿Qué sistemas del ejercicio oral 1 son homogéneos?

12. Solución por eliminación y sustitución. Un sistema lineal puede tener una solución única, muchas soluciones o bien no tener ninguna solución. En todos los casos se puede resolver el sistema mediante un proceso conocido como el de *solución por eliminación y sustitución.*

Con este procedimiento se seleccionan una ecuación y una variable x_i que aparezca en ella explícitamente. Entonces se restan múltiplos de esta ecuación a las restantes $m - 1$ ecuaciones para eliminar x_i de todas ellas. Se obtiene entonces un sistema lineal de $m-1$ ecuaciones en el cual x_i no aparece, y la ecuación original en la cual x_i aparece. Este nuevo sistema de m ecuaciones de n variables tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema dado y se dice que es equivalente a él.

Se procede ahora a modificar las $m-1$ ecuaciones en las cuales no hay x_i para obtener $m-2$ ecuaciones en las cuales no aparezca una segunda incógnita x_j, usando para ello una ecuación en la cual x_j aparezca explícitamente. Este proceso de *eliminar* sucesivamente variables terminará en cierta etapa. Se examinará ahora el resultado final y se hablará de las ecuaciones restantes como de las *ecuaciones finales*.

Puede suceder que en cierta etapa de la eliminación todas las variables desaparezcan en alguna ecuación y se llegue a una proposición numérica falsa, como, por ejemplo, $0 = 5 - 4$. En este caso el sistema de ecuaciones no tiene solución y se dice que el sistema es *incompatible* o *inconsistente*.

Cuando el sistema tenga una solución única, se tendrá siempre $m \geqq n$, y las $m-n$ ecuaciones finales tendrán al cero como término constante y todos los coeficientes de las variables serán también cero. Las n ecuaciones finales restantes serán tales que en una primera ecuación aparecerá explícitamente una sola variable, en una segunda aparecerá sólo una variable adicional explícitamente, en una i-ésima ecuación aparecerá explícitamente una i-ésima variable más, etc., y en la última ecuación aparecerá explícitamente una n-ésima variable. Se puede entonces resolver la primera ecuación para la primera variable y sustituir el resultado en las ecuaciones restantes deshaciéndose así de esta variable. El proceso de resolver y sustituir se puede entonces continuar y se llega a una solución *única* como resultado final.

En el único caso restante, el proceso de eliminación conduce a un sistema de $r \leqq m$ ecuaciones finales significativas de tal suerte que las restantes ecuaciones finales tienen todos los coeficientes cero, así como los términos constantes. En una de las ecuaciones mencionadas aparecerá explícitamente una variable que ya habrá sido eliminada de las demás ecuaciones. En una segunda ecuación aparecerá explícitamente una segunda variable que habrá sido eliminada de las restantes $m-2$ ecuaciones. La i-ésima ecuación contendrá explícitamente una i-ésima variable que habrá sido eliminada de las restantes $m-i$ ecuaciones, y la r-ésima ecuación, una r-ésima variable cuya eliminación de las restantes $m-r$ ecuaciones (si las hay) vuelve a éstas idénticamente nulas. Se puede entonces resolver el sistema de las r ecuaciones significativas finales para r variables como *funciones lineales* de las $n-r$ variables restantes, y se dirá entonces que las ecuaciones son ***dependientes*** si $n > r$.

Se tiene ahora una *nueva especie de solución* para un sistema de ecuaciones. No se trata de una solución numérica que conste de una colección $(c_1, \ldots, c_n)$ de números que satisfagan las ecuaciones, sino de una *colección de fórmulas* que expresan r de las variables *como funciones lineales de las restantes* $\mathrm{n}-\mathrm{r}$ *variables*. Estos resultados son soluciones en el sentido de que si las últimas $n-r$ variables son sustituidas por números arbitrarios y se calculan entonces los valores correspondientes de las primeras r variables, la colección que resulte será invariablemente una solución del sistema. Obsérvese, por otra parte, que la decisión de cuáles son las r variables que se resuelven, por lo general, no está impuesta por el problema, sino que depende enteramente de quien sea el que resuelve el sistema.

Puede demostrarse que el número r ya mencionado es el rango de la matriz de coeficientes del sistema lineal y que el sistema es consistente si y sólo si r es también el rango de la matriz aumentada del sistema. No se probará este resultado pero se usará en el ejemplo ilustrativo IV y deberá ser aplicado en el ejercicio 2.

Ejemplos ilustrativos

I. Resolver el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ 3x - 2y + 7z &= 14 \\ x + 3y - 3z &= -4. \end{aligned}$$

Solución

Designando con E_1, E_2, E_3 a las ecuaciones, respectivamente, fórmese $3E_1 - E_2$ para obtener $-y + 2z = 4$, y $E_1 - E_3$ para obtener $-4y + 6z = 10$. Entonces

$$4(-y + 2z) - (-4y + 6z) \equiv 2z = 16 - 10 = 6, \qquad z = 3.$$

También $y = 2z - 4 = 2$ y $x = y - 3z + 6 = 2 - 9 + 6 = -1$.

Resp.: $(-1, 2, 3)$.

II. Resolver el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= -4 \\ 5x + 3y + 3z &= 10. \end{aligned}$$

Solución

Formando $E_2 - E_1$ se obtiene $4y - 6z = -10$, y con $E_3 - 5E_1$ se obtiene $8y - 12z = -20$. Los coeficientes de las dos ecuaciones son proporcionales, las ecuaciones originales son dependientes y las soluciones pueden expresarse como $y = \dfrac{3z - 5}{2}$, $x = \dfrac{-3z + 7}{2}$.

III. Resolver el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= -4 \\ 5x + 3y + 3z &= 11. \end{aligned}$$

Solución

Procediendo como en el ejemplo ilustrativo II se obtiene $4y - 6z = -10$, y usando $E_3 - 5E_1$ se obtiene $8y - 12z = -19$. Restando el doble de $4y - 6z = -10$ de $8y - 12z = -19$, se obtiene $0 = 1$. El sistema es inconsistente.

IV. Demostrar que las ecuaciones del sistema lineal del ejemplo anterior son inconsistentes calculando los rangos de las dos matrices.

Observaciones: Se pueden calcular los rangos de A y A^* simultáneamente usando únicamente transformaciones elementales de renglones. Nótese que se harán realmente las mismas operaciones que en

III, pero se trabajará sólo con los coeficientes que forman los renglones de una matriz en lugar de hacerlo con las ecuaciones.

Solución

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \\ 0 & 8 & -12 & -19 \end{pmatrix}$$
$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces A tiene rango $r = 2$ y A^* tiene rango $r^* = 3$, y, por lo tanto, el sistema es inconsistente.

EJERCICIOS

1. Cada uno de los siguientes sistemas lineales tiene una solución única. Calcúlese ésta.

(a)
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -2 \\ 3x - 2y + 4z &= -5 \\ 2y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 6 \\ 4x - y \quad &= 9 \\ -7x + 2y + z &= -15 \end{aligned}$$
Resp.: (2, —1, 1).

(c)
$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &- 7 \\ 4x \quad + z &= 1 \\ 2x + 5y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + y - 5z &= 26 \\ x + 2y + z &= -4 \\ x + 3y + 6z &= -29 \end{aligned}$$
Resp.: (1, 0, —5).

(e)
$$\begin{aligned} x + y \quad &= 2 \\ 2x + y - z &= 5 \\ x + 2y - z &= 1 \\ x + 3y \quad &= 0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -15 \\ 3x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 11 \\ 7x + 11y \quad &= -30 \end{aligned}$$
Resp.: (2, —4, 7).

(g)
$$\begin{aligned} -3x + 2y + z - 2t &= 6 \\ -2x + 3y + 3z - t &= 14 \\ -y - 3z \quad &= -11 \\ -5x + 4y + 2z + 9t &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x \quad\quad - z + t &= -2 \\ -y + 2z - t &= 5 \\ x \quad + z + 2t &= 3 \\ 2x + y - z \quad\quad &= -6 \end{aligned}$$
Resp.: $(-1, -2, 2, 1)$.

(i)
$$\begin{aligned} x + 2y \quad\quad - t &= -2 \\ 2x + 3y - z \quad\quad &= -5 \\ -y + 2z + 4t &= 2 \\ -x \quad + 4z - t &= 6 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} -4x + y \quad\quad + t &= -10 \\ -2x \quad + 2z + t &= -4 \\ 2y - 3z \quad\quad &= 1 \\ -7x + 2y + 2z \quad\quad &= -15 \end{aligned}$$
Resp.: $(3, 2, 1, 0)$.

(k)
$$\begin{aligned} 4x - 2y + 5z + t &= 6 \\ -4x + y \quad\quad - t &= -2 \\ 2x + y - z + t &= 1 \\ x \quad + z - 2t &= 4 \\ 3x \quad + 5z - t &= 9 \end{aligned}$$

(l)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t &= 9 \\ x \quad\quad - z + t &= 1 \\ 3x - y + z \quad\quad &= -1 \\ -x + y \quad\quad + 2t &= 9 \\ 3x + y \quad\quad + 3t &= 9 \end{aligned}$$
Resp.: $(-1, 0, 2, 4)$.

2. Usar el método del ejemplo ilustrativo IV para determinar cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son consistentes:

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 5 \\ 4x + 7y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3 \\ 2x + 2y + z &= 2 \\ x - 3y + z &= 4 \end{aligned}$$
Resp.: $r = 2$, $r^* = 3$, inconsistente.

(c)
$$\begin{aligned} x - 4y + 6z &= 1 \\ 2x + 9y + 5z &= 9 \\ -x + 21y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 4x - 6y + 7z &= 8 \\ x - 2y + 6z &= 4 \\ 8x - 10y - 3z &= 8 \end{aligned}$$
Resp.: $r = r^* = 2$, consistente.

(e)
$$\begin{aligned} 2x - y \quad\quad + t &= 2 \\ -3x \quad + z - 2t &= -4 \\ x + y - z + t &= 2 \\ 2x - y + 5z \quad\quad &= 6 \end{aligned}$$

(*f*) $\begin{aligned} x + y + 2z - t &= 3 \\ 2x - y + z + t &= 1 \\ x - 5y - 4z + 5t &= -7 \\ 4x - 5y - z + 5t &= 3 \end{aligned}$

Resp.: $r = 2$, $r^* = 3$, inconsistente.

(*g*) $\begin{aligned} x + y \quad &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 5x + 2y + z &= 7 \\ 3x - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}$

(*h*) $\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ 2x - 2y + z - t &= 0 \\ 3x - 4y + z + 2t &= 1 \end{aligned}$

Resp.: $r = r^* = 3$, consistente.

3. Resolver los siguientes sistemas:

(*a*) $\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x - y - 3z &= -6 \\ x \quad - z &= 2 \end{aligned}$

(*b*) $\begin{aligned} 2x - 7y - 6z &= 0 \\ 3x + 5y - 2z &= 0 \\ 4x - 2y - 7z &= 0 \end{aligned}$

Resp.: $(0, 0, 0)$.

(*c*) $\begin{aligned} x - y + 5z &= 0 \\ 2x + 3y \quad &= 0 \\ 4x - 5y + 22z &= 0 \end{aligned}$

(*d*) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y + 5z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$

Resp.: Inconsistente.

(*e*) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y + 10z &= 0 \end{aligned}$

(*f*) $\begin{aligned} 3x - 2y \quad &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ -2x \quad + z &= 0 \end{aligned}$

Resp.: $(0, 0, 0)$.

(*g*) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 0 \\ 8x + 6y - z &= 0 \end{aligned}$

(*h*) $\begin{aligned} 2x + 3y - z - t &= 0 \\ x - y - 2z - 4t &= 0 \\ 3x + y + 3z - 2t &= 0 \\ 6x + 3y \quad - 7t &= 0 \end{aligned}$

Resp.: $(\tfrac{5}{3}t, -t, -\tfrac{2}{3}t, t)$.

(i)
$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 1 \\ 3x - 2y \qquad + 2t &= 3 \\ x + y + z \qquad &= -1 \\ -x + y + z - t &= 0 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} x + y - 3z + t &= 1 \\ 2x - 4y \qquad + 2t &= 2 \\ 3x - 4y - 2z \qquad &= 0 \\ x \qquad + 2z + 3t &= 3 \end{aligned}$$

Resp.: (0, 0, 0, 1).

(k)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x \qquad + z &= 0 \\ 12x + 9y + 10z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

(l)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ 4x - 2y - 2z &= 0 \\ 6x - y - 5z &= 0 \\ 7x - 3y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

Resp.: Inconsistente.

13. Solución con determinantes. La matriz de un sistema

(9)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= k_n \end{aligned}$$

de n ecuaciones lineales con n variables es una matriz cuadrada A y tiene un determinante $d = |A|$. Sea A_j la matriz obtenida de A al sustituir la columna j por la columna de las constantes, y sea $d_j = |A_j|$. Entonces si $r_1, \ldots, r_n$ es una solución del sistema de la fórmula (9) se puede demostrar que

(10)
$$dr_j = d_j.$$

En efecto, sea B_j la matriz obtenida de A al multiplicar la columna j de A por r_j. Entonces $|B_j| = dr_j$. Altérese B_j agregando a su j-ésima columna r_1 veces la primera columna, r_2 veces la segunda, ..., r_{j-1} veces la columna $(j-1)$, r_{j+1} veces la columna $(j+1)$, ..., r_n veces la columna n. Sea A_j

la matriz resultante. Según el teorema 6, $|B_j| = |A_j|$. Pero el j-ésimo elemento del renglón i-ésimo de A_j es

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{in}r_n = k_i,$$

y A_j es la matriz anteriormente definida. Esto prueba la fórmula (10).

Si $d \neq 0$, las soluciones del sistema de la fórmula (9) están unívocamente determinadas por la fórmula (10), esto es, el sistema se satisface solamente para $x_j = d_j d^{-1}$. Si $d = 0$ y alguna $d_j \neq 0$, el sistema es inconsistente. Sin embargo, puede seguir siendo inconsistente en caso de que $d = d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$.

Se indicará cómo puede usarse la fórmula (10) incluso en el caso de que $d = 0$, en los ejemplos que siguen. Se observará además que el método es aplicable al caso de m ecuaciones con n incógnitas.

Para finalizar se observa que un sistema homogéneo tiene siempre la *solución trivial* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ y que si éste consta de n ecuaciones y $d \neq 0$ entonces *ésta es la única solución*. En efecto, d_j tiene una columna de ceros y $d_j = 0$, $dx_j = 0$, $d \neq 0$, $x_j = 0$.

Ejemplos ilustrativos

I. Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ 3x - 2y + 7z &= 14 \\ x + 3y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

usando determinantes.

Solución

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 2,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 14 & -2 & 7 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 14 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

así que $x = -1$. Análogamente

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 14 & 7 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -10 & -6 \end{vmatrix} = 4,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 14 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -10 \end{vmatrix} = 6,$$

así que $y = 2$ y $z = 3$.

Solución 2

Se calcula $x = -1$ como anteriormente y se sustituye, obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} -y + 3z &= 7 \\ -2y + 7z &= 17. \end{aligned}$$

Resolviendo con determinantes se obtiene

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 17 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{49 - 51}{-7 + 6} = 2.$$

Entonces $3z = 7 + y = 9$ y $z = 3$.

II. Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= -4 \\ 5x + 3y + 3z &= 10. \end{aligned}$$

Solución

Se calcula

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 4(-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Se desprecia la última ecuación y se escriben las dos primeras en la forma

$$\begin{aligned} x - y &= -3z + 6 \\ x + 3y &= 3z - 4. \end{aligned}$$

Resolviendo por determinantes se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z + 6 & -1 \\ 3z - 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-9z + 18 + 3z - 4}{4} = \frac{-3z + 7}{2},$$

así como $y = \frac{1}{2} + (3z - 4) - (3z + 6) = \dfrac{-3z + 5}{2}$. Las soluciones satisfacen idénticamente a la tercera ecuación.

III. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= -4 \\ 5x + 3y + 3z &= 11. \end{aligned}$$

Solución

Como anteriormente, $d = 0$, y procediendo de la misma manera se obtiene $x = \dfrac{-3z + 7}{2}$, $y = \dfrac{3z + 5}{2}$. Sustituyendo esto en la última ecuación se tiene

$$5x + 3y + 3z = -15z + 35 + 9z + 15 + 6z = 22, \; 60 = 22,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el sistema es inconsistente.

IV. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 4x + y - 11z &= 0 \\ x - 3y + 7z &= 0. \end{aligned}$$

Solución

Se calcula

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -11 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -12 \\ -5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -30 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Escribiendo las ecuaciones primera y última como

$$\begin{aligned} 2x - y &= z \\ x - 3y &= -7z \end{aligned}$$

y resolviendo con determinantes se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ -7z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{z \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = 2z, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} z}{-5} = 3z.$$

EJERCICIOS

Resolver los ejercicios del artículo 11 usando determinantes.

14. Fracciones parciales. Toda función racional $\rho(x)$ puede expresarse como un cociente de dos polinomios en x.

Usando el algoritmo de la división se puede expresar $\rho(x)$ en la forma

$$\rho(x) = \phi(x) + \frac{f(x)}{g(x)},$$

en donde $\phi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ son polinomios en x y además el grado del numerador $f(x)$ es menor que el grado del denominador $g(x)$.

Supóngase ahora que es posible descomponer en factores $g(x)$ y escribirlo como un producto de potencias de sus distintos factores irreducibles. Entonces se puede expresar $\rho(x)$ como una suma de $\phi(x)$ y cierto número de las llamadas *componentes fraccionarias.*

El procedimiento aplicado utiliza solamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y por esto es una aplicación de los resultados de este capítulo.

Si $p(x)$ es un factor irreducible de $g(x)$ y m es su multiplicidad, entonces habrá una suma correspondiente de m componentes fraccionarias

$$\frac{h_1(x)}{p(x)} + \frac{h_2(x)}{p(x)^2} + \ldots + \frac{h_m(x)}{p(x)^m}.$$

Cada uno de los polinomios $h_i(x)$ está determinado de tal forma que su grado es menor que el grado de $p(x)$, y las ecuaciones lineales que se resuelven son ecuaciones lineales en los coeficientes de los polinomios $h_i(x)$. No se dará aquí la demostración de que existen las soluciones ni la discusión general del proceso para hallar las ecuaciones. Los métodos se presentarán adecuadamente en los ejemplos que van a continuación. Obsérvese que en el caso en que se permitan coeficientes reales los polinomios $p(x)$ serán cuadráticos o lineales y los polinomios $h_i(x)$ correspondientes serán lineales o constantes.

Ejemplos ilustrativos

I. Expresar la función racional

$$\frac{-2x^4 + 15x^2 - 20x + 13}{(x-1)^3(x+2)}$$

como una suma de componentes fraccionarias.

Solución

Multiplicando se ve que el denominador es

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

Dividiendo se tiene

$$p(x) \equiv -2 + \frac{-2x^3 + 9x^2 - 10x + 9}{(x-1)^3(x+2)},$$

y usando el teorema de arriba se escribe

$$\frac{-2x^3 + 9x^2 - 10x + 9}{(x-1)^3(x+2)} \equiv \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}$$

con a, b, c, d números por determinar. Entonces

$$\begin{aligned} -2x^3 + 9x^2 - 10x + 9 \equiv{} & a(x+2) + b(x-1)(x+2) \\ & + c(x-1)^2(x+2) + d(x-1)^3. \end{aligned}$$

Esta es una identidad polinomial y, por lo tanto, se igualan los coeficientes de las potencias x^3, x^2, x, 1 de x en los dos miembros, usando $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $(x-1)^2(x+2) = x^3 - 3x + 2$, $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, para obtener el sistema lineal

$$\begin{aligned} c + d &= -2 \\ b \qquad - 3d &= 9 \\ a + b - 3c + 3d &= -10 \\ 2a - 2b + 2c - d &= 9. \end{aligned}$$

Las soluciones son entonces $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -3$.

Observación: Se puede simplificar el trabajo dando *valores* a x. Si se usa el valor $x = 1$, se obtiene

$$3a = 6, \qquad a = 2,$$

y dando el valor -2 a x se obtiene

$$(-2)(-8) + 9(4) + 20 + 9 = 81 = -27d,$$

y así se tiene $d = -3$. La solución se completa usando el coeficiente inicial, obteniendo $-2 = c + d$, $c = 1$, y si a x se le da el valor 0, se obtiene

$9 = 2a - 2b + 2c - d$, $9 = 4 - 2b + 2 + 3 = 9 - 2b$, $b = 0$.

$$Resp.: \rho(x) = -2 + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2}.$$

II. Expresar

$$\rho(x) = \frac{x^6 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5}{(x^2+1)^2(x^2-2)}$$

como suma de componentes fraccionarias.

Solución

Se escribe

$$\rho(x) \equiv \frac{ax + b}{(x^2+1)^2} + \frac{cx + d}{x^2+1} + \frac{ex^2 + fx + g}{x^2 - 2},$$

obteniendo

$$x^6 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 5 \equiv (ax + b)(x^2 - 2)$$
$$+ (cx + d)(x^2+1)(x^2-2) + (ex^2 + fx + g)(x^2+1)^2.$$

Sin embargo, la factorización usada obliga a que a, b, c, d, e, f, g sean números racionales. Se hace $x^2 = -1$, $x = i$, y se obtiene

$$-1 + 5 - 3 - 5 - 3i - 4i = -4 + 7i = (ai + b)(-i - 2)$$
$$= a - 2b - (b + 2a)i.$$

Entonces $a - 2b = -4$, $2a + b = 7$ y $a = 2$, $b = 3$. Las ecuaciones resultan entonces

$$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 \equiv (cx + d)(x^2+1) + (ex^2 + fx + g)(x^2+1)^2.$$

Entonces $ci + d = 0$, $c = d = 0$, $ex^2 + fx + g \equiv x^2 + 1$.

$$Resp.: \rho(x) \equiv \frac{2x + 3}{(x^2+1)^2} + \frac{x^2+1}{x^2-2}.$$

EJERCICIO

Expresar las funciones racionales siguientes como suma de componentes fraccionarias:

(a) $\dfrac{3(x^2 + x)}{(x-2)(x+1)^2}$ Resp.: $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2}$.

(b) $\dfrac{x^2 - x}{(x+1)(x^2+1)}$

(c) $\dfrac{2x^2 + 8x - 8}{(x+2)(x^2+4)}$ Resp.: $\dfrac{4x}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+2}$.

(d) $\dfrac{1}{x^3 + 4x}$

(e) $\dfrac{x^4+1}{x^3+8}$ *Resp.*: $x - \dfrac{17x+28}{12(x^2-2x+4)} + \dfrac{17}{12(x+2)}$.

(f) $\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$

(g) $\dfrac{12+6x^2}{x^3+4x^2+3x}$ *Resp.*: $\dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{x+1} + \dfrac{11}{x+3}$.

(h) $\dfrac{5x^2-3}{x^3-x}$

(i) $\dfrac{3}{4x^3+8x^2+3x}$ *Resp.*: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x+1} + \dfrac{1}{2x+3}$.

(j) $\dfrac{5x^3+2x^2+1}{4x^3-x}$

(k) $\dfrac{2x^4-x^3-5x^2+2x+4}{(x^2-4)(2x-1)}$

Resp.: $x + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2x-1}$.

(l) $\dfrac{24x^2-10x+5}{(2x+1)(2x-1)^2}$

(m) $\dfrac{x^3-3x}{(x^2+1)^2}$ *Resp.*: $-\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x}{x^2+1}$.

(n) $\dfrac{x^5-1}{x^3+9x}$

(o) $\dfrac{x^5+1}{(x^2+4)^2}$ *Resp.*: $x + \dfrac{16x+1}{(x^2+4)^2} - \dfrac{8x}{x^2+4}$.

(p) $\dfrac{2x^2-3x+2}{(x+2)(2x^2+2x+2)}$

(q) $\dfrac{(x-3)^2}{(x^2+4x+5)^2}$ *Resp.*: $\dfrac{-10x+4}{(x^2+4x+5)^2} + \dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

(r) $\dfrac{x^2+5x}{(x+2)(x^2+4)}$

(s) $\dfrac{x^4-3}{(x-1)(x^2+1)}$ *Resp.*: $x + 1 + \dfrac{x+1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x-1}$.

(t) $\dfrac{3x^2-3x+1}{x^4+3x^2}$

(u) $\dfrac{x-10}{x^3-2x^2+5x}$ *Resp.*: $\dfrac{2x-3}{x^2-2x+5} - \dfrac{2}{x}$.

CAPITULO X

MATRICES Y FORMAS CUADRATICAS

(CURSO COMPLETO)

1. Productos escalares. La teoría de las matrices suele presentarse en cursos más avanzados. La *técnica* que en ella se usa es tan simple como muchas de las técnicas hasta aquí presentadas, y es de bastante importancia para que valga la pena hacer una exposición de la misma, la que se hará omitiendo las demostraciones de algunos de los teoremas principales y considerando este capítulo como *opcional.*

A un vector $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ se le llamará *vector n-dimensional,* o de *dimensión n,* y a sus elementos $a_1, \ldots, a_n$ se les denominará *coordenadas de* α. Entonces se puede interpretar α como un punto de un espacio geométrico de dimensión n, cuyo origen es el *vector cero* $(0, 0, \ldots, 0)$.

El *producto escalar* de α y otro vector $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$, también de dimensión n, es el número

$$\alpha\beta' = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n. \tag{1}$$

Esta definición es tal que $\alpha\beta' = \beta\alpha'$. La *norma* de α es el producto escalar

$$\alpha\alpha' = a_1^2 + \ldots + a_n^2, \tag{2}$$

y se dirá que α es un vector *unitario* si $\alpha\alpha' = 1$. Nótese que el vector ε_i, cuya *i*-ésima coordenada es 1 y cuyas demás coordenadas son cero, es un vector unitario.

Dos vectores α y β se dice que son *ortogonales* si $\alpha\beta' = 0$. Los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ se llaman ortogonales *dos a dos* si $\alpha_i\alpha_j' = 0$ para toda $i \neq j$.

Un vector cuyas coordenadas sean todas reales se llamará un vector *real*. Un vector real distinto del vector cero tiene norma $\alpha\alpha'$ positiva, y la raíz cuadrada positiva $r = \sqrt{\alpha\alpha'}$ se llama la *longitud* de α. Entonces el productor escalar del vector α por el número $1/r$ es un vector unitario

$$\mu = \frac{1}{r}\alpha = \left(\frac{a_1}{r}, \frac{a_2}{r}, \ldots, \frac{a_n}{r}\right). \tag{3}$$

Por consiguiente, $\alpha = r\mu$, es decir, todo vector real distinto de cero es el producto del escalar r por un vector unitario μ.

Si $\mu = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\nu = (v_1, \ldots, v_n)$ son vectores unitarios, su producto escalar satisface la relación

$$-1 \leqq \mu\nu' \leqq 1. \tag{4}$$

No se tratará de dar aquí la demostración de esto, pero obsérvese que implica que $\mu\nu'$ es el coseno de un ángulo θ entre 0 y π radianes. Se dirá que θ es el *ángulo entre* los vectores unitarios μ y ν. Entonces si $\alpha = r\mu$ y $\beta = s\nu$ son dos vectores arbitrarios no nulos, se define el *ángulo* θ *entre* α *y* β como el ángulo entre los vectores unitarios μ y ν. Esto da la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\alpha\beta'}{\sqrt{\alpha\alpha'}\,\sqrt{\beta\beta'}}. \tag{5}$$

Cuando $\alpha\beta' = 0$, el coseno de θ es cero y $\theta = \pi/2$ radianes. Entonces los vectores α y β pueden considerarse como perpendiculares entre sí y ésta es la razón por la cual se dice que α y β son ortogonales cuando $\alpha\beta' = 0$.

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular $\alpha\beta'$, donde

$\alpha = (1 \quad -2 \quad 3 \quad 4)$ y $\beta = (2 \quad 1 \quad -3 \quad 2)$.

Solución

$$\alpha\beta' = (1 \cdot 2) + (-2 \cdot 1) + (3 \cdot -3) + (4 \cdot 2) = -1.$$

Observación: En los casos en que las coordenadas de α y β fueran decimales, sería conveniente colocar los vectores en la siguiente forma, para facilitar los cálculos:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & (1 \quad -2 \quad 3 \quad 4) \\ \beta = & (2 \quad 1 \quad -3 \quad 2) \\ \hline \alpha\beta' = & \;\;2 \quad -2 \quad -9 \quad +8 = -1. \end{array}$$

II. Calcular $\alpha = (2 \quad -6 \quad 18 \quad 6) = r\mu$, donde μ es un vector unitario.

Solución

$$\alpha\alpha' = 4 + 36 + 324 + 36 = 400 \qquad \text{y} \qquad r = 20,$$

$$\alpha = 20\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS ORALES

1. (*a*) Calcular las normas de los vectores (2), $(3 \quad 0 \quad 2)$, $(2 \quad -1 \quad 3)$, $(3 \quad -1 \quad 4 \quad 2)$, $(4 \quad 1 \quad 3 \quad -1)$, $(\frac{1}{3} \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{5}{3})$.

(*b*) Calcular las longitudes de los vectores de arriba.

(*c*) Expresar cada uno de los vectores de arriba como el producto de su longitud por un vector unitario.

2. Demostrar que los siguientes vectores son ortogonales dos a dos:

(*a*) $(1 \quad -1 \quad 2)$, $(1 \quad 3 \quad 1)$, $(-7 \quad 1 \quad 4)$
(*b*) $(1 \quad 1 \quad 1)$, $(1 \quad -1 \quad 0)$, $(1 \quad 1 \quad -2)$
(*c*) $(1 \quad 2 \quad 3)$, $(1 \quad -5 \quad 3)$, $(3 \quad 0 \quad -1)$
(*d*) $(2 \quad 1 \quad 0)$, $(-1 \quad 2 \quad 1)$, $(1 \quad -2 \quad 5)$

2. Producto de matrices. El producto AB de dos matrices A y B *no está definido* a menos que el *número de columnas* en el factor A de la izquierda sea *igual* al *número de renglones* en el factor B de la derecha.

Se define el *producto* AB de una matriz de m por n

$$A = (a_{ij}) \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

por una matriz de n por t

$$B = (b_{jk}) \qquad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, t),$$

como la matriz de m por t

$$(6) \quad C = AB = (c_{ik}) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, t),$$

en la cual

$$(7) \qquad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Así, cada elemento de la matriz del producto AB es la suma de los n productos de los n elementos de un renglón de A por los correspondientes elementos de una columna de B. Esta definición se llama la *regla de renglón por columna* para la multiplicación de matrices.

Nótese que si $\alpha = (a_1a_2 \ldots a_n)$ y $\beta = (b_1b_2 \ldots b_n)$ son matrices de 1 por n, el producto de matrices

$$\alpha\beta' = (a_1a_2 \ldots a_n)\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \beta\alpha' = (b_1b_2 \ldots b_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

es el producto escalar definido en el artículo 1. Esta es la razón de la notación usada. Se ve también que *el elemento en el renglón* i *y la columna* k *del producto de matrices* AB *es el producto escalar del renglón* i *de* A *por la columna* k *de* B.

No se ha dicho nada acerca de que la definición de producto de matrices implique que cuando están definidos AB y BA éstos sean iguales. En efecto, incluso *BA puede no estar definido* aunque lo esté AB. Sin embargo, aun cuando AB y BA sean ambas matrices del mismo orden, éstas pueden ser diferentes. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices cuyos elementos son todos cero se llaman *matrices cero* y se representan con el símbolo 0. Ellas tienen la propiedad de que $0A = A0 = 0$ para cualquier matriz de m por n y matrices cero de orden adecuado. Puede también suceder que el producto de las matrices A y B distintas de cero sea cero. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las *matrices identidad* o matrices *uno* son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos diagonales son todos 1 y cuyos elementos no diagonales son todos cero. Estas matrices se representan con I. Entonces,

$$IA = AI = A$$

para todas las matrices A de m por n y las correspondientes I de m por m cuando I está como primer factor, y de n por n cuando I es el segundo factor. Finalmente, se enunciarán los siguientes resultados, sin efectuar las demostraciones:

Teorema 1. *La multiplicación de matrices es asociativa, es decir, si* AB *y* BC *están definidas, se tiene* $(AB)C = A(BC)$.

Teorema 2. *La matriz transpuesta de un producto* $A_1A_2 \ldots A_t$ *de matrices es igual al producto* $A_t'A_{t-1}' \ldots A_2'A_1'$ *de las transpuestas de los factores, en orden inverso.*

Teorema 3. *El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de los factores.*

Teorema 4. *El rango de un producto de matrices no excede al rango de ningún factor.*

Ejemplos ilustrativos

I. Calcular

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución

$c_{11} = (0 \cdot 2) + (1 \cdot 3) + (2 \cdot -1),$
$c_{12} = (0 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot 2),$
$c_{21} = (-2 \cdot 2) + (1 \cdot 3) + (1 \cdot -1),$
$c_{22} = (-2 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 2),$
$c_{31} = (2 \cdot 2) + (-4 \cdot 3) + (-1 \cdot -1),$
$c_{32} = (2 \cdot -1) + (-4 \cdot 0) + (-1 \cdot 2),$
$c_{41} = (1 \cdot 2) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot -1),$
$c_{42} = (1 \cdot -1) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 2).$

$$\textit{Resp.: } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \\ -7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

II. Calcular $Y = AX$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$\begin{aligned} u &= 2x + 2y + z \\ v &= -x + 2y - 2z \\ w &= 2x - y - 2z. \end{aligned}$$

III. Calcular AB y BA, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad B = (4 \quad 2 \quad 3).$$

Solución

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}(4 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \\ -12 & -6 & -9 \end{pmatrix},$$

$$BA = (4 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1).$$

IV. Calcular AB y BA, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

V. Calcular AB y BA siendo B la transpuesta de A y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$AA' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $AB = BA$ en este caso.

EJERCICIOS

1. Calcular A', B', $C' = (AB)'$ así como $B'A'$ siendo A, B las matrices de los ejemplos ilustrativos I, III, IV.

2. Calcular $(AB)C$ y $A(BC)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular los siguientes productos de matrices:

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(*b*) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -a & 0 \\ ac & bc & -(a^2b^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & ac \\ b & -a & bc \\ c & 0 & -(a^2b^2) \end{pmatrix}$

(*c*) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

(*d*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

(*e*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(*f*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(*g*) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(*h*) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(*i*) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. El producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal. ¿Cuáles son los elementos diagonales?

3. La inversa de una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada A se llama *no singular* si su determinante es diferente de cero. Entonces existe una matriz *única* A^{-1}, llamada la *inversa de A,* tal que el producto

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

es la matriz identidad con el mismo número de renglones que A. Según el teorema 3, se tiene $|I| = |A||A^{-1}|$. Pero $|I| = 1$ y, por lo tanto, se tiene el siguiente:

Teorema 5. *El determinante de* A^{-1} *es el inverso del determinante de* A.

También se tiene $(AA^{-1})' = (A^{-1})'A' = I' = I$. Este resultado se enuncia como teorema.

Teorema 6. *La inversa de la transpuesta de una matriz* A *es la transpuesta de* A^{-1}.

Ya que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$, se tiene el caso particular de un teorema que se da a continuación sin demostración adicional.

Teorema 7. *La inversa de un producto* $A_1A_2 \dots A_t$ *de matrices cuadradas no singulares es igual al producto*

$$A_t^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

de sus inversas en orden contrario.

Dos matrices A y B de m por n se llaman *equivalentes si es posible llevar la matriz* A *a la matriz* B *mediante una sucesión finita de transformaciones elementales.* Entonces se enunciará el siguiente:

Teorema 8. *Dos matrices* A *y* B *son equivalentes si y sólo si existen matrices no singulares* P *y* Q *tales que* B = PAQ.

En efecto, supóngase que una sucesión de transformaciones de renglones y columnas convierten la matriz A de m por n en B. Aplíquense todas las transformaciones de renglones a la matriz identidad de orden m para obtener una matriz P y todas las transformaciones de columnas a la matriz identidad de orden n para obtener una matriz Q tal que $B = PAQ$.

La inversa de una matriz cuadrada de orden dos está dada por las fórmulas:

$$(8) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad t = ad - bc \neq 0,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{t} & \dfrac{-b}{t} \\ \dfrac{-c}{t} & \dfrac{a}{t} \end{bmatrix}.$$

La inversa de una matriz cuadrada A de orden n para $n > 2$ puede también expresarse mediante una fórmula que contiene al determinante de A y a los cofactores de los elementos de A, pero es preferible calcular A^{-1} resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Se dará esta solución en el artículo siguiente.

EJERCICIOS ORALES

1. Dar las inversas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

2. ¿Cuál es la inversa de una matriz diagonal cuyos elementos son todos distintos de cero?

4. Transformaciones lineales. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, se puede formar un sistema lineal asociado

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Este sistema lineal es equivalente a la ecuación matricial

$$AX = Y,$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Si $|A| \neq 0$ y, por lo tanto, existe A^{-1}, multiplicando la igualdad $AX = Y$ por A^{-1} por la izquierda se obtiene $X = A^{-1}Y$. Así, pues, si se resuelve la fórmula (9) para $x_1 \ldots, x_n$, se obtendrán las ecuaciones

$$(11) \qquad \begin{aligned} x_1 &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n \\ x_2 &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{nn}y_n, \end{aligned}$$

equivalentes a la ecuación matricial $X = PY$, donde

$$(12) \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Esto muestra cómo cálcular A^{-1} resolviendo un sistema lineal.

Las ecuaciones de las fórmulas (9) y (11) se llaman las ecuaciones de una *transformación* (homogénea) *lineal no singular*. Si se interpretan los números $x_1, \ldots, x_n$ como las coordenadas de un punto, entonces la fórmula (9) expresa las coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ del mismo punto relativas a un nuevo sistema de coordenadas en función de las coordenadas antiguas. Las ecuaciones de la fórmula (11) se llaman la *forma resuelta* de las ecuaciones de la fórmula (9). Ellas expresan las coordenadas antiguas $x_1, \ldots, x_n$ en función de las cordenadas $y_1, \ldots, y_n$.

Ejemplo ilustrativo

Calcular A^{-1} si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

El sistema de ecuaciones (9) da

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= u \\ x + y - 2z &= v \\ x - z &= w. \end{aligned}$$

Elimínese z para obtener

$$\begin{aligned} x - 2y &= u - w, \\ -x + y &= v - 2w. \end{aligned}$$

Entonces

$$-(x-2y)-2(-x+y)=x=-(u-w)-2(v-2w)$$
$$=-u-2v+5w.$$

También

$$y=x+v-2w=-u-v+3w,\quad z=x-w=-u-2v+4w,$$

así que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 5\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse la respuesta calculando el producto AA^{-1} o $A^{-1}A$.

EJERCICIOS

Calcular las inversas de las siguientes matrices A y comprobar los resultados calculando $AA^{-1}=I$.

(a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *(g)* $\begin{pmatrix}3 & -3 & 4\\ -4 & 7 & -1\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *(h)* $\begin{pmatrix}3 & -3 & 4\\ 1 & 7 & 1\\ 2 & -4 & 3\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}5 & 4 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *(i)* $\begin{pmatrix}1 & -6 & 3\\ 4 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ *(j)* $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -5 & 0\\ -2 & 1 & -5 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}5 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ *(k)* $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix}$ *(l)* $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 6\end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (o) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. **Matrices semejantes.** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, se designará con $A - xI$ el resultado de la sustracción formal de x a todos los elementos de la diagonal. Es decir,

$$(13) \quad A - xI = \begin{bmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - x \end{bmatrix}$$

La matriz de los números obtenida al reemplazar la variable x de la fórmula (13) por un número d se denotará con $A - dI$.

El *determinante característico* de una matriz cuadrada A es el polinomio en x con coeficiente inicial 1 dado por

$$(14) \qquad F(x) = (-1)^n|A - xI|.$$

La ecuación $F(x) = 0$ se llama *ecuación característica* de A y las raíces $d_1, \ldots, d_n$ de ésta se llaman *raíces características* de A, las cuales forman el conjunto que consta de todos los números d_j tales que

$$(15) \qquad |A - d_jI| = 0.$$

Una matriz cuadrada B se dice que es *semejante* a una matriz A si existe una matriz no singular P tal que $B = P^{-1}AP$. Se supondrán, sin demostraciones, los resultados siguientes:

Teorema 9. *Las matrices semejantes tienen el mismo determinante característico y, por consiguiente, las mismas raíces características.*

Teorema 10. *Las raíces características de una matriz diagonal D son los elementos diagonales de D.*

Teorema 11. *Toda matriz simétrica real es semejante a una matriz diagonal.*

Teorema 12. *Toda matriz cuyas raíces características sean diferentes es semejante a una matriz diagonal.*

El teorema 10 implica que si una matriz A es semejante a una matriz diagonal D, los elementos de la diagonal de D son las raíces características de A. La colocación de estos elementos en la diagonal de D es realmente arbitraria. Supóngase dada la matriz A y que se quiera determinar cuándo A es semejante a una matriz diagonal D. Primero se determinan las raíces características de A y, por consiguiente, una matriz diagonal D. Entonces se busca una matriz *no singular* P tal que

$$AP = PD. \tag{16}$$

Si P_j es la columna j de P, la columna j de PD es el múltiplo escalar d_jP_j. La columna j de AP es AP_j y la fórmula (16) es equivalente a n sistemas lineales homogéneos, cada uno de n ecuaciones y n variables. Estos sistemas se pueden expresar en forma matricial como

$$(A - d_jI)P_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Siempre es posible resolver estos sistemas y determinar P. Cuando A no es semejante a D, ningún conjunto de soluciones de las ecuaciones de la fórmula (17) dará una matriz no singular P.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar las raíces características de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución

$$F(x) = (-1)^3\begin{vmatrix} -x & 7 & -6 \\ -1 & 4-x & 0 \\ 0 & 2 & -x-2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2-4x+7 & 6 \\ -1 & 4-x & 0 \\ 0 & 2 & x+2 \end{vmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$f(x) = (x+2)(x^2-4x+7) - 12 = x^3 - 2x^2 - x + 2$$
$$= (x-2)(x^2-1). \qquad \textit{Resp.: } d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = -1.$$

II. Demostrar que la matriz del ejemplo ilustrativo I es semejante a una matriz diagonal.

Primero se resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} -x + 7y - 6z &= 0 \\ -x + 3y \quad\ &= 0 \\ 2y - 3z &= 0, \end{aligned}$$

cuya matriz es $A - I$. Entonces $x = 3y$, $3z = 2y$ y la primera columna es un múltiplo escalar de 9, 3, 2. El sistema con matriz $A - 2I$ da $-x + 2y = 0$, $2y - 4z = 0$, de donde $x = 2y - 4z$, y la segunda columna puede tomarse igual a 4, 2, 1. Finalmente, el sistema con matriz $A - 4I$ da $-x + 4y = 0$, $2y - z = 0$, de donde $x = 4y$, $z = 2y$. Por lo tanto, puede tomarse

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |P| = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

III. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

no es semejante a una matriz diagonal.

Solución

El determinante característico de A es $(x-1)^2(x-2)$ y $d_1 = d_2 = 1$. Por consiguiente, las columnas primera y segunda de P se obtienen resolviendo el sistema lineal con matriz $A - I$. El sistema es $y = 0 = z$ y las dos columnas primeras de P son necesariamente proporcionales. De aquí, $AP = PD$ implica que $|P| = 0$, de donde A y D no son semejantes.

EJERCICIOS ORALES

Hallar los determinantes característicos y las raíces características de las matrices siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS

1. Calcular las raíces características de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Resp.: $-1, -1, -1, -1$.

(f) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ *Resp.:* 1, 4, 16.

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *Resp.:* —1, 2, 3.

(j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 9 & 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *Resp.:* 1, —1, 2, —3.

2. Hallar una matriz diferente de cero P tal que $AP = PD$ para cada matriz del ejercicio 1, donde D es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son las raíces características de A. Decir en cada caso cuándo A es o no semejante a D.

Resp. (e): $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A no es semejante a D.

Resp. (g): $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, A y D son semejantes.

Resp. (i): $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A y D son semejantes.

Resp. (*l*): $P = \begin{pmatrix} -13 & 1 & 1 & -7 \\ -37 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, A y D son semejantes.

6. Formas cuadráticas. Una forma *cuadrática* de n variables es un polinomio con n variables cuyos términos son todos de grado dos. La forma cuadrática más general con una variable es ax^2, donde a es un número y x una variable. La forma cuadrática general con dos variables, o *binaria*, puede representarse como

$$f(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2$$

donde a, b, c son números. Un polinomio puede ser considerado como una matriz de 1×1. Entonces $f(x, y)$ puede expresarse como un producto de matrices

$$f(x, y) \equiv (x \quad y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática general *ternaria* o con tres variables es $f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2rxy + 2sxz + 2tyz$. Puede expresarse como el producto de matrices

$$f(x, y, z) = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} a & r & s \\ r & b & t \\ s & t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Una forma cuadrática en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una suma de términos $a_{ij}x_ix_j$ para $i, j = 1, \ldots, n$. El coeficiente de x_i^2 es el número a_{ii}. El coeficiente total de $x_ix_j = x_jx_i$ es $a_{ij} + a_{ji}$. Es costumbre escribir este coeficiente total como el doble de un número que se designará ahora como a_{ij}, teniendo así $a_{ij} = a_{ji}$. Entonces la forma cuadrática puede expresarse como un producto de matrices

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X'AX.$$

Aquí $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y simétrica, es decir, tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para toda pareja de índices i, j. Se tiene también

$$X' = (x_1\ x_2 \dots x_n), \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix},$$

es decir, que X' es la transpuesta de X.

A la matriz simétrica A se le llama *matriz de la forma cuadrática* $f(x_1, \dots, x_n) = X'AX$, y su rango se dice que es el rango de $f(x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar la matriz de la forma cuadrática

$$3x^2 + 2xy + 3yz + 5z^2.$$

Solución

Tomando $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 5 \end{pmatrix}.$$

II. Hallar la matriz de

$$2x^2 + 5xy + 6y^2 + 3xz + yt + 5z^2 + xz + 2tz.$$

Solución

$f(x, y, z, t) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 0t^2 + 2(5/2)xy + 2(3/2)xz + 0xt + 0yz + 2(1/2)yt + 2zt$ y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 3/2 & 0 \\ 5/2 & 6 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS ORALES

Hallar las matrices de las formas cuadráticas siguientes:

(a) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$
(b) $-2x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy + 6xz + 6yz$
(c) $4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$
(d) $3x^2 - 3y^2 - 5z^2 - 2xy - 4xz - 6yz$
(e) $3x^2 - y^2 + z^2 - xy + xz + 3yz$
(f) $2x^2 + y^2 - 5xy - 3yz + 6xz$
(g) $3xy - x^2 - yz - 5xz$
(h) $4zx + y^2 + zy + z^2 + 3yz$
(i) $x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 3xt + 4yt$
(j) $xy + xz + xt + 3yz + 5zt$
(k) $2xy + 2xt - y^2 + yz - zx - t^2$
(l) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy + 2xz - 2zt + xt$
(m) $(x - t)^2 - (y - z)^2 + (2z - t)^2$
(n) $4(x + y)^2 - (2x - t)^2 - x(y - z)$

7. Equivalencia de las formas cuadráticas.

Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una forma cuadrática tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = X'AX$ donde X es una matriz de una sola columna y A una matriz simétrica.

Escríbase

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad X = PY, \tag{18}$$

donde $P = (p_{ij})$ es una matriz no singular. Entonces

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (PY)'A(PY) = Y'(P'AP)Y = Y'BY$$
$$= g(y_1, \ldots, y_n)$$

es una forma cuadrática en $y_1, \ldots, y_n$ con matriz

$$B = P'AP. \tag{19}$$

Por lo tanto, *una transformación lineal con matriz* P *reemplaza una forma cuadrática de matriz* A *por una forma cuadrática con matriz* P'AP.

Se dice que dos formas cuadráticas $f(x_1, \ldots, x_n)$ y $g(x_1, \ldots, x_n)$ son *equivalentes* si existe una transformación lineal no singular (18) que transforme $f(x_1, \ldots, x_n)$ en $g(y_1, \ldots, y_n)$. Se dice que dos matrices simétricas A y B son *congruentes* si están relacionadas como en la fórmula (19). Entonces, *dos formas cuadráticas son equivalentes si y sólo si sus matrices son congruentes.*

Puede probarse que dos matrices A y B son congruentes si y sólo si puede encontrarse una sucesión de transformaciones elementales en los renglones de A tal que, seguida de la sucesión de transformaciones *correspondientes* en las columnas, lleva a A en B. Se supondrá este resultado, así como el siguiente:

Teorema 13. *Toda forma cuadrática* f *es equivalente a una forma cuadrática diagonal* $b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2$ *donde*

$$b_1b_2 \ldots b_r \neq 0,$$

$b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$ *y* r *es el rango de la matriz de* f.

En el estudio de las formas cuadráticas con coeficientes reales, se permiten solamente transformaciones lineales cuyas matrices consten de elementos reales. Supóngase que se ha llevado una forma cuadrática real f a la forma diagonal equivalente $b_1x_1^2 + \ldots + b_rx_r^2$. Entonces el número de coeficientes positivos entre $b_1, \ldots, b_r$ *es siempre el mismo, sin que importe qué forma diagonal se haya obtenido,* y a este número natural se le llama el *índice* de f. Se sigue que *dos formas cuadráticas reales son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango y el mismo índice.*

Un *valor* de una forma cuadrática real es un número real

$$f(c_1, \ldots, c_n).$$

Se dice que $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una forma *positiva* si todo valor $f(c_1, \ldots, c_n) \geqq 0$, y que $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una forma negativa si $-f(c_1, \ldots, c_n)$ es positiva. Puede demostrarse que $f(x_1, \ldots, x_n)$ *es positiva si y sólo si su índice es igual a su rango.*

Una forma cuadrática $f(x_1, \ldots, x_n)$ se llama *positivamente definida* si $f(c_1, \ldots, c_n) > 0$, excepto cuando

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

Esto ocurre cuando y solamente cuando n es el rango y el índice de $f(x_1, \ldots, x_n)$. Cuando todos los valores de $f(x_1, \ldots, x_n)$ excepto $f(0, 0, \ldots, 0)$ son negativos, se dice que $f(x_1, \ldots, x_n)$ es *negativamente definida* y esto ocurre cuando $-f(x_1, \ldots, x_n)$ es positivamente definida.

Ejemplo ilustrativo

Calcular el índice de la forma cuadrática

$$f(x, y, z) \equiv 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 10xz - 4yz.$$

Solución

La matriz de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intercambiando los dos primeros renglones y después las dos primeras columnas, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se suma el primer renglón al segundo y el doble del mismo primer renglón al tercero, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Restando al tercer renglón el segundo resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Entonces la teoría general expresa que las transformaciones correspondientes de columnas llevarán esta matriz a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

que es congruente con A. Luego el rango de $f(x, y, z)$ es tres, su índice es dos, y $f(x, y, z)$ es equivalente a la forma cuadrática diagonal $x^2 + 3y^2 - 5z^2$.

EJERCICIOS

Usense transformaciones elementales que incluyan solamente números racionales para hallar formas cuadráticas diagonales equivalentes a cada una de las formas cuadráticas siguientes. Decir el rango y el índice en cada caso.

(*a*) $6x^2 + 14y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz$
(*b*) $2x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 8xy + 2xz + 8yz$
(*c*) $2x^2 + 3y^2 + 16z^2 + 4xy - 8xz$
(*d*) $2xy - 4yz$
(*e*) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4yz - 3z^2$
(*f*) $4xy - 4yz - 6xz$
(*g*) $2(xy + yz + zt)$
(*h*) $5x^2 + 13y^2 + z^2 + 16xy - 2yz$
(*i*) $13x^2 + 6y^2 - 2z^2 - t^2 - 2yt + 8xy - 2zt$
(*j*) $5x^2 - 2xz + 4xt + y^2 - 4yz + 2yt - 2z^2 - 2zt - t^2$

8. Matrices ortogonales. Una matriz P se llama *ortogonal* si $PP' = I$. Entonces la transpuesta de P es la inversa de P.

Resulta claro que los renglones de una matriz ortogonal son vectores unitarios y ortogonales dos a dos. Como $PP' = I$ implica que $P'P = I$, las columnas de una matriz ortogonal son también vectores ortogonales dos a dos y unitarios.

Si P es una matriz ortogonal y D una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son $d_1, \ldots, d_n$, entonces la columna j de PD es d_j veces la columna j de P. Entonces, el módulo de la columna j de PD es d_j y las columnas de PD son todavía vectores ortogonales dos a dos. Sin embargo, los renglones de PD ya no serán, en general, ortogonales dos a dos.

Teorema 14. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ t *vectores reales* n-*dimensionales ortogonales dos a dos. Entonces* $t \leqq n$ *y existen* $n - t$ *vectores* $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n$ *tales que los vectores* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *son ortogonales dos a dos.*

Corolario. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *vectores reales seleccionados como en el teorema 14. Entonces la matriz* P, *cuyo renglón* i *es*

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_i \alpha_i'}} \alpha_i, \tag{20}$$

es una matriz ortogonal.

Teorema 15. *El producto de dos matrices ortogonales es u ia matriz ortogonal.*

Ejemplos ilustrativos

I. Hallar una matriz ortogonal P cuyo primer renglón sea un múltiplo escalar de $(1, -1, 2)$.

Solución

La ecuación $x - y + 2z = 0$ tiene a $x = y = 1$, $z = 0$ como una solución. Entonces, $(1 \quad 1 \quad 0)$ es un vector ortogonal para $(1 \quad -1 \quad 2)$. Un vector $(x \quad y \quad z)$ ortogonal simultáneamente a $(1 \quad -1 \quad 2)$ y $(1 \quad 1 \quad 0)$ satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Se ve que $y = -x$, $2x + 2z = 0$, $z = y = -x$, y los renglones de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales dos a dos. Reemplazando los renglones por vectores unitarios múltiplos escalares de aquéllos, se obtiene una matriz ortogonal.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

que es una solución del problema planteado.

II. Hallar una matriz ortogonal P cuyos dos primeros renglones sean múltiplos escalares de $(2 \quad 1 \quad -2)$, $(1 \quad 2 \quad 2)$.

Solución

Se resuelven las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $3x + 3y = 0$, $x = -y$, $2x - x = x = 2z$, de donde $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$ es una solución. Los renglones de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales dos a dos, y una solución del problema es la matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Hallar una matriz ortogonal cuyo primer renglón sea un múltiplo escalar de

(*a*) $(1 \quad -1)$ (*d*) $(1 \quad -1 \quad 1)$ (*g*) $(-3 \quad 1 \quad 1)$
(*b*) $(2 \quad 1)$ (*e*) $(1 \quad 1 \quad 0)$ (*h*) $(2 \quad 0 \quad 1)$
(*c*) $(-4 \quad 0)$ (*f*) $(1 \quad 2 \quad 1)$ (*i*) $(-1 \quad 1 \quad 4)$

2. Hallar una matriz ortogonal cuyos dos primeros renglones sean múltiplos escalares, respectivamente, de los renglones de las matrices siguientes:

(*a*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (*f*) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*b*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (*g*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(*c*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (*h*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(*d*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (*i*) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(*e*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. Reducción ortogonal de una forma cuadrática. Una *transformación lineal ortogonal* es una transformación lineal $X = PY$, en la que P es una matriz ortogonal. Entonces, la forma resuelta de esta transformación es $Y = P'X$, que se obtiene de $X = PY$ simplemente cambiando los renglones por las columnas en la matriz de coeficientes P.

Si X_1 y X_2 son dos vectores cualesquiera (de columna), entonces su producto escalar es $X_1'X_2$. Los vectores transformados son $Y_1 = P'X_1$, $Y_2 = P'X_2$ y $Y_1'Y_2 = X_1'PP'X_2 = X_1'X_2$. Así pues, *una transformación lineal ortogonal conserva los productos escalares de cualquier pareja de vectores.* Por lo tanto, conserva la longitud de un vector, así como los ángulos entre dos vectores.

Si P es una matriz ortogonal, se tiene $PP' = I$,

$$|PP'| = 1 = |P|^2$$

y $|P| = \pm 1$. Se dice que una transformación ortogonal es una *rotación de ejes* si $|P| = 1$, y que una forma cuadrática $f(x_1, \ldots, x_n)$ es *equivalente* bajo una rotación de ejes a $g(x_1, \ldots, x_n)$ si

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv X'AX \equiv g(y_1, \ldots, y_n) = Y'BY,$$

donde $B = P'AP$, $PP' = I$, $|P| = 1$. Entonces se puede enunciar el siguiente:

Teorema 16. *Toda forma cuadrática real*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = \mathrm{X'AX}$$

es equivalente bajo una rotación de ejes a una forma cuadrática diagonal $\mathrm{d}_1\mathrm{x}_1^2 + \ldots + \mathrm{d}_n\mathrm{x}_n^2$, *donde* $\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_n$ *son las raíces características de la matriz simétrica real* A.

La matriz P se determina como en el artículo 5 mediante la propiedad de que la columna j-ésima, P_j de P es un vector unitario tal que $(A - d_jI)P_j = 0$. La propiedad $|P| = 1$ puede obtenerse *cambiando el signo de todos los elementos* de una *columna* de P si es necesario. En el caso $n = 3$ se escribirá

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2rxy + 2sxz + 2tyz$$

y las ecuaciones de la rotación de ejes serán

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' \\ y &= \mu_1 x' + \mu_2 y' + \mu_3 z' \\ z &= \nu_1 x' + \nu_2 y' + \nu_3 z'. \end{aligned} \tag{21}$$

La forma resuelta de esta ecuación es

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z \\ y' &= \lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 z \\ z' &= \lambda_3 x + \mu_3 y + \nu_3 z. \end{aligned} \tag{22}$$

De aquí

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = 1$$

y se resuelven los sistemas

$$(A - d_1 I)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (A - d_2 I)\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad (A - d_3 I)\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{23}$$

donde d_1, d_2, d_3 son las raíces de $F(x) = -|A - xI| = 0$.

Ejemplo ilustrativo

Hallar la forma cuadrática diagonal a la cual puede llevarse

$$f(x, y, z) \equiv 3x^2 + 4y^2 - z^2 - 12xy - 8xz + 4yz$$

mediante una rotación de ejes, y dar las ecuaciones de esta rotación.

Solución

La matriz de $f(x, y, z)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -6 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su función característica es

$$F(x) \equiv -\begin{vmatrix} 3-x & -6 & -4 \\ -6 & 4-x & 2 \\ -4 & 2 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x-9 & -6 & 4 \\ -2x+2 & 4-x & -2 \\ 0 & 2 & 1+x \end{vmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv -2[2(x+9)-4(-2x+2)] \\ &\qquad + (1+x)[(x+9)(x-4)+6(-2x+2)] \\ &\equiv -2(10x+10)+(x+1)(x^2-7x-24) \\ &\equiv (x+1)(x^2-7x-44) = (x+1)(x+4)(x-11). \end{aligned}$$

Entonces $f(x, y, z)$ se transformará en $-x'^2 - 4y'^2 + 11z'^2$ bajo la rotación de ejes requerida. Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 - 6\mu_1 - 4\nu_1 &= 0, \\ -6\lambda_1 + 5\mu_1 + 2\nu_1 &= 0, \\ -4\lambda_1 + 2\mu_1 \qquad &= 0, \end{aligned}$$

con matriz $A + I$ para obtener $\mu_1 = 2\lambda_1$, $-6\lambda_1 + 10\mu_1 + 2\nu_1 = 0$, $\nu_1 = -2\lambda_1$. Así, la primera columna es un vector unitario que es múltiplo escalar de 1, 2, -2. El sistema de ecuaciones con matriz $A + 4I$ es

$$7\lambda_2 - 6\mu_2 - 4\nu_2 = -6\lambda_2 + 8\mu_2 + 2\nu_2 = -4\lambda_2 + 2\mu_2 + 3\nu_2 = 0$$

y $-5\lambda_2 + 10\mu_2 = 0$, $\lambda_2 = 2\mu_2$, $\nu_2 = 3\lambda_2 - 4\mu_2 = 2\mu_2$, de donde la segunda columna es un múltiplo de 2, 1, 2. Finalmente,

$$-8\lambda_3 - 6\mu_3 - 4\nu_3 = -6\lambda_3 - 7\mu_3 + 2\nu_3 = -4\lambda_3 + 2\mu_3 - 12\nu_3 = 0,$$

$(-4\lambda_3 - 3\mu_3 - 2\nu_3) + (-6\lambda_3 - 7\mu_3 + 2\nu_3) = -10\lambda_3 - 10\mu_3 = 0$ y $\lambda_3 = -\mu_3$, $6\mu_3 - 7\mu_3 + 2\nu_3 = 0$, $\mu_3 = 2\nu_3$. El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -27,$$

y deben cambiarse los signos de una de las columnas. Cámbiense los signos de los elementos en la última columna. La longitud de cada vector de las columnas es $\sqrt{1+4+4} = 3$, y la matriz de la rotación de ejes es

$$P = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

Las ecuaciones de la rotación de ejes en forma matricial son $X = PY$, donde X y Y son vectores de columna y, por consiguiente, las ecuaciones resultan

$$x = \frac{x' + 2y' + 2z'}{3}, \quad y = \frac{2x' + y' - 2z'}{3}, \quad z = \frac{-2x' + 2y' - z'}{3}.$$

Se usaron los *renglones* de P como coeficientes. Los denominadores en cada columna, en este ejercicio, son todos iguales, pero en otros problemas, los denominadores de columnas distintas serán, por lo general, diferentes. Las *columnas* de P son los coeficientes en la forma resuelta

$$x' = \frac{x - 2y - 2z}{3}, \quad y' = \frac{2x - y - 2z}{3}, \quad z' = \frac{2x - 2y - z}{3},$$

y puede ser preferible dar las respuestas en esta forma. Nótese, finalmente, que si $P^{-1}AP = D$, la *suma de los elementos diagonales de* A *es igual a la suma de los elementos diagonales de* D. Esto se debe a que esta suma, con signo opuesto, es el coeficiente de x^{n-1} en la ecuación característica común. Este resultado es útil para comprobar los resultados. La matriz P *no es única si las raíces características de* A *no son todas diferentes.* Cuando estas raíces son todas diferentes, P es única, excepto por el cambio de signo de cualquier par de sus columnas.

EJERCICIOS

Hallar una rotación de ejes que lleve $f(x, y, z)$ a una forma cuadrática diagonal $g(x', y', z')$ en cada uno de los casos siguientes. Comprobar los resultados en los casos en que no se den las respuestas, mostrando que $AP = PD$, donde P es la matriz de la rotación de ejes, A es la matriz de $f(x, y, z)$ y D es la matriz de $g(x', y', z')$.

(*a*) $f = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz.$

Resp.: $g = x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2;$

$3x' = 2x + y - 2z;\ 3y' = x + 2y + 2z;$

$3z' = 2x - 2y + z.$

(*b*) $f = -2x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy + 6xz + 6yz.$

(*c*) $f = 4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz.$

Resp.: $g = 5x'^2 + 2y'^2 - 10z'^2;$

$\sqrt{5}x' = 2x + y,\ \sqrt{6}y' = -x + 2y + z,$

$\sqrt{30}z' = x - 2y + 5z.$

(d) $f = 3x^2 + 3y^2 - 5z^2 - 2xy - 6xz - 6yz.$

(e) $f = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$

Resp.: $g = 4x'^2 + z'^2;$

$\sqrt{6}x' = 2x - y + z,\ \sqrt{2}y' = y + z,\ \sqrt{3}z' = -x - y + z.$

(f) $f = 2x^2 - y^2 + 2z^2 - 6xy - 6yz.$

(g) $f = 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2yz.$

Resp.: $g = 5x'^2 + 6y'^2 + 2z'^2;$

$\sqrt{3}x' = x + y + z,\ \sqrt{2}y' = x - y,\ \sqrt{6}z' = x + y - 2z.$

(h) $f = 2x^2 - z^2 + 2xy - 4yz.$

(i) $f = x^2 + 2xy - 2xz - 4yz.$ *Resp.:* $g = 3y'^2 - 2z'^2;$

$\sqrt{6}x' = 2x - y + z,\ \sqrt{3}y' = x + y - z,\ \sqrt{2}z' = y + z.$

(j) $f = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz.$

(k) $f = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 4xz - 4yz.$

Resp.: $g = -2x'^2 - 2y'^2 + 7z'^2;$

$3x' = 2x - y + 2z,\ 3y' = -x + 2y + 2z,$
$3z' = 2x + 2y - z.$

(l) $f = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz.$

(m) $f = 12x^2 - 6y^2 - 4z^2 - 12xy + 12yz.$

Resp.: $g = 14x'^2 - 12y'^2;$

$\sqrt{91}x' = 9x - 3y - z,\ \sqrt{14}y' = x + 2y + 3z,$
$\sqrt{26}z' = x + 4y - 3z.$

(n) $f = x^2 + y^2 + 9z^2 + 16xy + 8yz - 8xz.$

(o) $f = 4x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xz.$

Resp.: $g = 2x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2;$

$\sqrt{2}x' = x + 2,\ \sqrt{3}y' = x + y - z,\ \sqrt{6}z' = -x + 2y + z.$

(p) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2yz + 2xy.$

10. Factorización de una matriz simétrica positiva. Toda matriz simétrica positiva A admite una factorización

$$A = FF',$$

donde el número de columnas en la matriz rectangular F es el rango r de A. Un método para determinar F, llamado *método diagonal de factorización*, se presenta en el ejemplo ilustrativo al final de este artículo. Se enunciará (sin demostrarlo) el siguiente:

Teorema 17. *Sea* $\mathbf{A} = \mathbf{FF}'$, *donde* $\mathbf{F}$ *es una matriz de* r *columnas y* r *es el rango de* $\mathbf{A}$. *Entonces* $\mathbf{A} = \mathbf{GG}'$ *para una* *matriz* G *de* r **columnas** *si y sólo si* G = FU, *donde* U *es una matriz ortogonal de orden* r.

Si $A = FF'$, la matriz $B = F'F$ es una matriz simétrica de orden r, y por el teorema 2 existe una matriz ortogonal V de orden r tal que

(24) $$V'BV = D_0$$

es una matriz diagonal. Pero si $H = FV$, la matriz

(25) $$D_0 = V'F'FV = H'H.$$

Se sigue que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ son las columnas de H, entonces

(26) $$\gamma_i'\gamma_j = 0, \qquad \gamma_i'\gamma_i \doteq d_i \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, r).$$

También VV' es la matriz identidad de orden r y

(27) $$HH' = FVV'F' = FF' = A.$$

Se obtiene así una factorización $A = HH'$ tal que las columnas de H son ortogonales dos a dos.

Se puede escribir

(28) $$A = HH' = PDP',$$

donde P es una matriz ortogonal de orden n cuyas primeras r columnas son $\alpha_i = \sqrt{d_i^{-1}}\,\gamma$ y D es una matriz diagonal de orden n cuyos primeros r elementos diagonales son $d_1, \ldots, d_r$ y sus elementos diagonales restantes son cero. Puesto que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son vectores unitarios ortogonales dos a dos, P existe y PDP' incluye solamente las primeras r columnas de P. Así, pues, los números $\gamma_i'\gamma_i$, que son las sumas de los cuadrados de los elementos en las columnas de H, son las raíces características no nulas de $A = FF'$ y también las raíces características de $F'F$.

Esta teoría establece que para obtener las raíces características no nulas de una matriz simétrica A de orden n y de rango $r < n$, puede factorizarse $A = FF'$ y formar la ma'riz no singular simétrica $F'F$ de orden r. Entonces las raíces características de $F'F$ serán las raíces características no nulas de A. También asegura que si se encuentra una matriz ortogonal V tal que $V'BV$ es una matriz diagonal, entonces las columnas de $H = FV$ serán ortogonales dos a dos y $A = HH'$.

Del procedimiento antes descrito se obtiene lo que se llama una *factorización ortogonal* HH' de A. Es de valor práctico solamente en el caso en que r es considerablemente menor que n, y no se darán ejercicios para ilustrar el proceso.

Ejemplo ilustrativo

Factorizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 17 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Observaciones: Si A es una matriz simétrica positiva real de orden n y de rango r, existe entonces una matriz cuadrada real, B, de orden n y de rango r tal que $A = BB'$. La matriz B puede tomarse como la matriz obtenida de una matriz triangular mediante cualquier permutación de sus renglones y columnas. Entonces exactamente r columnas de B serán distintas de cero y estas columnas, en cualquier orden, forman una matriz F tal que $A = FF'$. En el ejemplo considerado y en los ejercicios propuestos a continuación hay una solución F con números enteros. Se enfoca la atención en los elementos diagonales de A y se localiza un renglón de una posible B con un solo elemento distinto de cero, buscando el correspondiente elemento diagonal x^2 Esto determinará una columna de B, y entonces se pasa a un renglón de B con dos elementos, a lo sumo, distintos de cero y con uno de ellos conocido. Los elementos diagonales correspondientes de A determinarán el orden.

Solución

Ya que $a_{33} = 9$, se toma el tercer renglón de B igual a $(3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. El tercer renglón de $A = BB'$ es $(3 \ -3 \quad 9 \ -6)$ y así el primer renglón de B' es $(1 \ -1 \quad 3 \ -2)$. Así se ha determinado la primera columna de B y se puede tomar

$$BB' = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ -1 & y & z & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ x & y & 0 & u \\ 0 & z & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 17 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Esto conduce a $1 + x^2 = 5$ y $x = 2$. Entonces $-1 + 2y = 7$, y $y = 4$, $-2 + 2u = 0$ y $u = 1$. Se ve ahora que $17 = 1 + 16 + z^2$, de donde $z = 0$; $4 + 1 + v^2 + w^2 = 5$, y, por consiguiente, $v = w = 0$, y $A = FF'$, donde

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los resultados semejantes de los ejercicios siguientes deben verificarse calculando FF'.

EJERCICIOS

Factorizar las matrices siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 13 & -11 \\ -4 & -11 & 17 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 17 & 1 \\ 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 18 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 13 & -14 \\ 4 & 2 & -14 & 17 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 8 & 12 \\ -3 & -3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 29 & 17 & -22 & 6 \\ 17 & 10 & -13 & 3 \\ -22 & -13 & 17 & -3 \\ 6 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 8 \\ 6 & 11 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & -6 \\ 8 & 8 & -6 & 24 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 14 & 13 \\ -2 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & -6 & 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

INDICE ALFABETICO

O

P

R

—o0o—

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
30 DE AGOSTO DE 1991, EN LOS TALLERES DE
TECNOIMPRESOS LARC, AHUEHUETES 69
COL. SAN BARTOLO ATEPEHUACAN
MÉXICO, D.F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 1 000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

505

OBRAS AFINES:

ÁLGEBRA SUPERIOR

H.S. Hall
S.R. Knight

Es una continuación del álgebra elemental, donde los teoremas, temas, ejemplos y ejercicios se reservan sólo para cursos más avanzados.

Tal especialidad temática es abordada por Álgebra superior en forma amplia, minuciosa y a fondo. En los primeros capítulos muestra razones, proporciones, análisis combinatorio y progresiones.

Posteriormente, desarrolla el método de diferencias a partir de la fórmula de diferencia finita; y, con objeto de introducir al lector en la tesis de la geometría analítica, incluye un estudio elemental de los determinantes.

Asimismo, presenta la discusión de la convergencia y divergencia de series, tema que por dificultad comprensiva, se apoya en un breve capítulo sobre límites y formas indeterminadas; para luego, exponer las proporciones más útiles de la teoría de las ecuaciones.

ÁLGEBRA SUPERIOR

Marie J. Weiss
Roy Dubisch

Es una revisión de la edición original escrita por Marie Weiss, a la cual, se le incluyeron capítulos que cubren tópicos como la independencia y dependencia lineal de vectores, los productos internos de vectores y el concepto de base y dimensión de un espacio vectorial.

De igual forma, se presenta una introducción al álgebra abstracta; además de abarcar los aspectos elementales de mayor importancia en la materia: dominios enteros, anillos, campos, grupos, espacios vectoriales y matrices.

Cabe mencionar que así como se evitaron las explicaciones sofisticadas, se agregaron ejercicios e ilustraciones explícitas de las definiciones.

En suma, por la transición gradual del texto, esta obra es una base sólida para efectuar trabajos posteriores en otros campos de las matemáticas.

El deseo de que el alumno se inicie cuanto antes en el análisis del cálculo infinitesimal, origina que el estudio del álgebra sea, en ocasiones, un curso incompleto.

Al respecto, la presente obra reorganiza el material de álgebra para escuelas superiores con el fin de mostrarlo como un todo concreto y unificado.

De igual forma, ajusta los temas del álgebra superior a su propia unidad básica consistente en la observación de los sistemas numéricos de las matemáticas elementales, los polinomios y funciones aliadas, identidades algebraicas, ecuaciones, y sistemas de ecuaciones.

Asimismo, expone con exactitud las definiciones y teoremas sin omitir amplia explicación de cada tema; además, destaca la técnica y los conceptos relevantes con suficientes ejemplos y ejercicios.

La obra comprende 10 capítulos, de entre los que se encuentran: identidades y aplicaciones, vectores en el plano y ecuaciones; para así concluir con un experimento pedagógico (matrices y formas cuadráticas), en respuesta a las demandas por parte de economistas, matemáticos y psicólogos.

ÁREA: MATEMÁTICAS
ISBN 968-18-4041-0
9 789681 840419